Aula Material
Número 5 • SEPTIEMBRE 1992 • SUPLEMENTO AULA 6

Visión espacial: cortando un cubo

Pilar Alonso
Ángel Salar

ÍNDICE

A causa de la extensión de esta Unidad, desde la actividad 13 hasta la 24, así como el Material complementario, se publicará en el Aula Material n° 6, correspondiente a octubre de 1992

Director Aula Material: Gregorio Casamayor. Secretaría de Redacción: Carola Bedós, Gloria Puig. Edita: GRAÓ Educación. c/ de l'Art, 81 , bajos. 08026 Barcelona. Teléfono (93) 348 1844. Producción: Punt i Ratlla S.A. Servicios Editoriales y de Comunicación. Impresión: Imprimeix SCCL. Diseño: ACE Disseny. ISSN: 1132-0699 DL: B- 9617-1992

INTRODUCCIÓN

El mundo en el que vivimos es un espacio extraordinariamente parecido al espacio abstracto tridimensional de la geometría euclidiana. Para interpretar muchas de sus claves o representaciones es fundamental disponer de algunas herramientas geométricas y haber desarrollado la capacidad de crear imágenes mentales. Existe una creencia, bastante extendida, cual es suponer que tales capacidades son poco menos que innatas: hay quien las tiene y quien no las tiene. Algunas causas de estos hechos tienen su origen en la escasa práctica que se hace de estas capacidades y, sobre todo, que en las escuelas apenas si se les presta atención. Las capacidades espaciales de los niños y las niñas superan, con frecuencia, sus habilidades numéricas. Sin embargo, como dice Freudenthal, a la edad en que uno es más sensible a la geometría, no se le enseña más que cálculo aritmético. La escolarización y la falta de práctica se encargan, con el paso del tiempo, de que desarrollen principalmente sus capacidades numéricas y éstas terminen por predominar sobre las espaciales.

Un examen de los nuevos diseños curriculares pone de manifiesto que el desarrollo del sentido espacial como un contenido con entidad propia se trata de forma muy tímida.

La propuesta que presentamos tiene como punto de partida la imaginación y como hilo conductor el desarrollo del sentido espacial. Se pretende despertar la capacidad de los alumnos y alumnas para crear imágenes y desarrollar esa capacidad en contextos poco habituales en los actuales programas escolares. Se trata de hacer consciente al alumno de que dispone de la capacidad de crear imágenes y que puede usarla en situaciones muy diversas. No es sólo crear imágenes mentales, copia de la realidad, sino de transformar dinámicamente dichas imágenes, sometiéndolas a control y organizando los resultados. Además, es preciso insistir en que no es a partir del tratamiento de los contenidos de geometría tradicionales como pretendemos favorecer el desarrollo de la visión espacial; sino que, mediante actividades de imaginación y visión espacial genuinas, van apareciendo contenidos y problemas geométricos ya conocidos que con frecuencia se tratan aisladamente, sin esta intencionalidad expresa.

Las actividades que proponemos se han seleccionado pensando en estudiantes del último curso de Educación Secundaria Obligatoria. El tiempo que habría que emplear para su desarrollo sería de 12 a 15 períodos lectivos aproximadamente.

El tratamiento de los temas matemáticos propuestos admite diferentes niveles de profundización. Los estudiantes que dominen las técnicas analíticas y procedimientos algebraicos podrán plantearse conseguirlos resultados por tales medios. En cambio, aquellos otros que no estén tan familiarizados con los procedimientos anteriores, pueden obtener resultados similares mediante procedimientos geométricos o manipulativos. Si bien debería fomentarse en todos los alumnos y alumnas el desarrollo de procedimientos geométricos antes que los analíticos o algebraicos, dejando estos últimos sólo como una extensión posible de las actividades para aquellos que estén en condiciones de hacerlo. En este último caso se les debería animar también a comparar unos procedimientos con otros.

¿Qué es el sentido espacial?

El sentido espacial está íntimamente relacionado con la capacidad de crear imágenes mentales. Como ha señalado F. Hernán (1991), esta capacidad de la imaginación que él ha llamado «imaginabilidad», expresa dos ideas relacionadas con ella: la cualidad de imaginable (como carácter de algo) y la habilidad para crear imágenes (como facultad sicológica).

Tener sentido espacial es poseer la capacidad de comparar la forma de figuras con diferente orientación, (mentalmente giramos una de ellas para hacerlo más fácil), reconocer las simetrías de ciertas figuras, relacionar rectángulos y paralelogramos (manteniendo las longitudes de los lados pero cambiando los valores de los ángulos), dibujar un diagrama para ayudarnos en la resolución de un problema de enunciado verbal o estimar el valor del ángulo de dos líneas rectas que se cortan.

El sentido espacial juega un gran papel en el razonamiento matemático y traspasa los límites de la misma geometría. Se ha puesto de manifiesto en diversas investigaciones que los buenos resolutores de problemas usan más la imaginación mental que los malos, y que la habilidad para transformar y comparar imágenes mentalmente está en estrecha relación con el éxito en el cálculo integral, por citar sólo dos ejemplos de importancia capital en las matemáticas.

El desarrollo del sentido espacial tiene una componente, ya apuntada, asociada íntimamente con las matemáticas, pero su ámbito desborda los límites estrechos de la disciplina. Ocupa un territorio fronterizo en el que pueden confluir una gran parte de las áreas del currículum, en especial la educación plástica y visual; pero no es menos importante en Educación Física, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales, Educación Ambiental, etc. Esto le confiere unas características interdisciplinares de primer orden que vendrían a abundar aún más, si cabe, en la necesidad de un tratamiento en profundidad en el currículum escolar.

ESTRUCTURA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Conocimientos previos de los alumnos

Los conocimientos que se requieren para realizar este trabajo son mínimos. Una cierta familiaridad con el cubo, el conocimiento de sus elementos característicos: caras, vértices y aristas. Algunas propiedades elementales: las caras son paralelas dos a dos, las aristas son entre sí paralelas o perpendiculares... Aunque los estudiantes no manejen de forma fluida la terminología adecuada, puede ser ésta una buena ocasión para afianzar tales conocimientos de tipo descriptivo. Asimismo, los alumnos y alumnas deberían tener nociones sobre:

1. Polígonos, sus propiedades y relaciones.
2. Dibujo en perspectiva de cuerpos geométricos sencillos.
3. Construcción del desarrollo plano del cubo y otros sólidos.

Estructura de la Unidad Didáctica

La unidad de la secuencia de actividades de aprendizaje que presentamos viene determinada por una estructura conceptual: el sentido espacial y por un objeto geométrico que es el soporte prácticamente de todas las actividades: el cubo.

Las actividades en sí constituyen una «diversidad» de situaciones que, a nuestro entender, favorecen el desarrollo de la imaginación y el sentido espacial. Pese a su diversidad aparente (si las analizamos desde una óptica clásica de elección de contenidos), constituyen situaciones geométricas ricas en posibilidades, en las que se establecen conexiones entre diversos contenidos matemáticos en contextos muy variados.

Podemos distinguir tres partes en las situaciones planteadas:

1. Actividades de imaginación yvisión espacial específicas: las seis primeras. Están pensadas para servir de introducción al trabajo posterior.
2. Actividades en las que la imaginación se desarrolla sobre objetos geométricos conocidos, que hay que someter a análisis para determinar sus propiedades y relaciones.
3. Actividades de consolidación de conocimientos sin perder de vista en ellas su componente esencial de imaginación y el pensamiento espacial. Las últimas actividades propuestas tra-

tan de consolidar los conocimientos y poner de relieve el interés de estos temas en otras áreas y en sólidos diferentes del cubo.

En el desarrollo de la Unidad Didáctica van apareciendo temas de estudio colaterales (módulos, figuras imposibles, realidad-representación, etc.), no menos interesantes que los que proponemos, que se destacan por su interés sin profundizar en ellos. En las sugerencias para el profesor anotamos su posible tratamiento como extensiones del trabajo. Algunos también podrían contemplarse en otras áreas, desde una perspectiva no matemática.

OBJETIVOS Y CONTENIDOS

Algunos de los objetivos que nos han llevado a plantear esta unidad en la forma que ha tomado finalmente y que determinan, en buena medida, la metodología a emplear son los siguientes:

1. Utilizar la comunicación verbal y escrita para expresar ideas y pensamientos geométricos. En particular, describir, ilustrar, predecir y explicar con la terminología adecuada situaciones, tanto mentales como aquellas otras que sean el resultado de la manipulación concreta de objetos.
2. Usar los conocimientos geométricos y los procedimientos analíticos como herramientas que permiten verificar, comprobar y poner de manifiesto laveracidad o no de las hipótesis y conjeturas realizadas para interpretar y explicar una situación espacial o mental. En este contexto los alumnos deberían llegar avalorar más el propio proceso de pensamiento que los resultados inmediatos.
3. Crear imágenes, siendo conscientes de la existencia de esta capacidad y sobre todo que puede usarse con éxito en una gran variedad de contextos geométricos. Destacar su importancia y utilidad de la misma, así como la posibilidad de transferirla eficazmente a diferentes situaciones, tanto de la vida cotidiana como culturales y profesionales. Promover la confianza en la propia imaginación y en el pensamiento como un medio de favorecer la autonomía personal.
   Enunciado éste y el anterior propósito de forma más general, podrían resumirse así: usar las capacidades personales y los conocimientos matemáticos como herramientas útiles y necesarias para interpretar una amplia gama de situaciones tanto escolares como de la vida cotidiana.
4. Reconocer las relaciones e interconexiones que existen dentro de las propias matemáticas. En particular, que plano y espacio están interrelacionados y que existe una dinámica múltiple entre las propiedades de las figuras planas y los cuerpos espaciales. Plantear situaciones que supongan pasar del plano al espacio y del espacio al plano con objeto de explicar problemas concretos de cada ámbito, mediante tal cambio de perspectiva.
5. Utilizar métodos propios de pensamiento. Puesto que no parecen existir imágenes canónicas del pensamiento y menos aún de la capacidad de imaginar, la mayor parte de las propuestas de este trabajo pretenden que los alumnos y alumnas desarrollen las suyas propias y las compartan con sus compañeros para obtener resultados finales comunes. Nadie puede sustituirles en esta tarea, *ni enseñarles cómo tienen que pensar,* sino, en todo caso, estimularles a hacerlo. El papel del profesor o profesora, en consecuencia, es el de un compañero de viaje que tratará de animar y provocar la imaginación de los alumnos y que compartan su pensamiento colectivamente tanto por escrito como verbalmente.
6. Desarrollar pequeñas investigaciones que suponen la realización, en algunos de los temas, de un estudio en profundidad y no tan fragmentado como se hace a menudo, y que potencialmente tienen el valor añadido, no exclusivamente matemático, de favorecer en los estudiantes el desarrollo de cualidades personales como la perseverancia y la dedicación sostenida a un empeño.

Prácticamente, los contenidos generales más importantes del currículum de geometría aparecen, en mayor o menor grado, en las actividades que se proponen. La novedad más reseñable, a nuestro entender, es que todos ellos se tratan con la intencionalidad precisa de desarrollar el sentido espacial y surgen de un único sólido: el cubo.

Un resumen incompleto de algunos de estos contenidos es el siguiente:

- Elementos característicos y propiedades de polígonos y cuerpos.
- Intersección de planos y sólidos.
- Áreas, perímetros y volúmenes.
- Estimación de medidas.
- Medida de ángulos.
- Utilización precisa de instrumentos de dibujo.
- Formulación y comprobación de conjeturas sobre propiedades y relaciones geométricas.
- Utilización y análisis de representaciones planas de objetos tridimensionales: desarrollos planos y dibujo en perspectiva.
- Búsqueda de regularidades y generalización de resultados.
- Utilización del método de ensayo y error aplicado a la resolución de problemas geométricos.
- Tratamiento de figuras planas en contextos no habituales.
- Valoración de la importancia del trabajo colectivo en la resolución de un problema.
- Interés y respeto por las estrategias y soluciones distintas de las propias.
- Valoración del sentido espacial como una componente esencial de la experiencia matemática.
- Reconocimiento de la utilidad de la geometría para interpretar y resolver problemas del entorno físico.
- Confianza en la adquisición y mejora progresiva del sentido espacial propio.

METODOLOGÍA

El principal aspecto metodológico que considerar en el desarrollo de la unidad es el papel del profesor o profesora. Su intervención en clase no puede ser sustituida por fichas de activi dades o por textos escritos que presenten o sugieran las actividades. La redacción que se presenta de las actividades para el alumno no deja de ser un recurso de estilo para exponer el material de la forma más aproximada posible a como ha sido la realidad de alguna de nuestras clases. Aunque parezca que las actividades están pensadas para ser utilizadas directamente por los alumnos, porque se dirigen a ellos, en ocasiones, en primera persona, no sería deseable que esto sucediera así. Sólo en contados casos, podrían presentarse los problemas en hojas de trabajo para que también se desarrolle la capacidad de lectura e interpretación de un texto sin la intervención del profesor. La cantidad de matices y sugerencias que un profesor puede hacer al proponer las actividades, especialmente las de la primera parte en que se plantean preguntas con la intención de despertar y poner en marcha la imaginación y el pensamiento de los alumnos, jamás podrá hacerlas con la misma riqueza plástica un texto escrito.

En el planteamiento y desarrollo de algunas de las actividades de la segunda y tercera parte, es menos necesaria la intervención del profesor o profesora. Pero esto no es del todo cierto y no somos capaces de imaginar esta unidad didáctica descompuesta en fichas de trabajo que puedan ser entregadas a los alumnos para que las desarrollen libremente. Porque no se trata tanto de que los estudiantes respondan a unas fichas que plantean unas preguntas concretas sobre geometría, sino que desarrollen un proceso de trabajo que para ser más fructífero, debiera seguir un esquema metodológico determinado por la relación dinámica entre alumnos y profesor.

Para destacarlo claramente lo vamos a comparar con otros posibles esquemas de trabajo: los alumnos disponen del material: cubos y cutters. Después de cada pregunta cortan los cubos de acuerdo con lo que se les pide y dan sus respuestas. El esquema en este caso sería:

Haz--------- > Descubre

En general, las fichas de trabajo que supuestamente pretenden favorecer la invención de los estudiantes siguen un esquema un poco más complejo pero, como ha señalado Fielker (1987), insuficiente:

Haz --------- > Discute con los compañeros -------- > Descubre

Ser capaz de decir lo que se observa como resultado de una actividad manipulativa y pensar que así se ha descubierto algo nuevo nos parece una simplificación de la complejidad del proceso de aprendizaje, que sólo funcionaría eficazmente, de funcionar, con los niños más pequeños.

El esquema que hemos utilizado en clase y que sugerimos que se emplee, tiene la secuencia siguiente:

Descubre ------------------- > Discute ----------- > Haz
(emisión de conjeturas)

La mayor parte de las propuestas de trabajo consisten en determinar las secciones de corte en un cubo, proporcionando algunas pistas que sugieren las respuestas. No se espera como resultado que los alumnos y alumnas corten realmente el cubo y den la respuesta a continuación; todo lo contrario, el hecho de no tener que llegar a cortar fisicamente el cubo -porque se tenga suficiente confianza en el propio pensamiento- debería ser un objetivo final de esta serie de actividades.

Se debería propiciar, en primer lugar, que los estudiantes, después de cada pregunta, den una respuesta rápida, lo más inmediata posible, basada en sus primeras percepciones visuales. Muchas de estas respuestas espontáneas suelen ser falsas o no del todo acertadas y responden más a preconcepciones visuales o intuiciones que a una experiencia reflexiva. Así se consiguen dos efectos; por un lado, obtener información acerca de cómo piensan los alumnos, lo que permitirá diagnosticar tanto al profesor como a ellos mismos las limitaciones iniciales que se tienen; por otro lado, sirven de referencia para contrastarlas con los resultados finales, obtenidos después de haber realizado un pensamiento más analítico de las situaciones. Un elemento importante para mejorar la capacidad visual consiste en volver atrás y recapitular acerca de los factores que han condicionado nuestras primeras impresiones, analizar por dónde discurren los fallos de pensamiento para así tratar de corregirlos o al menos conocerlos. En futuras ocasiones, al estar advertidos será más fácil tenerlos en cuenta. Una buena parte de las preconcepciones visuales suelen ser sistemáticas y aparecen repetidas insistentemente en personas muy diversas tanto por edad como por cultura. El problema propuesto en la Actividad [14] es un buen ejemplo de lo que decimos.

Una vez que se ha elaborado una hipótesis de trabajo, la discusión con el resto de compañeros y con el profesor o profesora puede poner de manifiesto lo acertado o no del pensamiento, lo que permite que el razonamiento se reformule con la emisión de nuevas hipótesis sobre el tema. Sólo en el caso en que las ideas en contraste sean muy variadas y no se produzca el acuerdo porque ninguna tenga mayor solidez que las restantes, los estudiantes tendrán la oportunidad de realizar realmente el corte de los cubos y comprobar lo que ocurre. También en el caso de que se quiera tener mayor seguridad empírica: para verificar el propio pensamiento (cuando haya acuerdo en las respuestas) se debería cortar y comprobar, pero siempre como resultado final del proceso y nunca como punto de partida del mismo.

Por último, queremos hacer una observación metodológica, válida para cualquier tema, sobre la forma en que se hacen las preguntas. Hay una tendencia general a presentar las actividades siempre con la misma estructura, lo que limita su comprensión e impide diferentes aproximaciones a los temas. Conviene invertir la forma de hacer las preguntas porque de este modo los esquemas de pensamiento tienen que variar y no se vuelven rutinarios.

Así, en la Actividad [16], ya no se proporcionan los puntos de corte sobre el cubo y se pide la figura resultante. Se dice el polígono que se quiere obtener y se les pide a los alumnos que investiguen la amplia gama de situaciones posibles en que esa figura puede presentarse. Esta nueva formulación de la pregunta conlleva mayor grado de dificultad y los estudiantes deberían tener la oportunidad, en este caso, de manipular previamente para ir comprobando sus conjeturas antes de llegar al resultado final.

La secuencia de actividades presentadas no pretende ser rígida, aunque a nuestro parecer tiene un cierto orden lógico y coherencia interna. En ocasiones, dependiendo de los objetivos que nos hemos planteado para un curso concreto, este orden ha sido alterado, si bien manteniendo el esquema general. Cada profesor o profesora debería fijarse su propio orden si así lo estimase conveniente, de acuerdo con sus propósitos y gustos, modificando la secuencia de actividades y completándola con otras propias. Las hojas de trabajo para el alumno permiten al profesor presentar las actividades de acuerdo con sus propios intereses y pueden facilitarle esta tarea.

En las actividades que necesitan de una imagen hemos utilizado sistemáticamente transparencias y retroproyector. Especialmente en todas aquellas en que la simple imagen estática empobrece sus posibilidades de interpretación. La superposición de transparencias permite poner de manifiesto con imágenes sucesivas, los aspectos dinámicos de las secuencias de cortes paralelos a uno dado y las modificaciones de una situación se pueden visualizar paso a paso.

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA EVALUACIÓN

Si, como se ha señalado, lo que tratamos con esta Unidad es que los alumnos y alumnas desarrollen estrategias generales de pensamiento, como imaginar, observar diferencias, y establecer analogías, buscar y poner de manifiesto regularidades, hacer conjeturas y comprobarlas, analizar las condiciones iniciales y finales de una situación, hacer previsiones mediante el análisis de situaciones, etc., puede afirmarse que una evaluación de tales contenidos al modo como se entiende habitualmente carezca de sentido, no ya porque las estrategias no puedan enseñarse de igual modo que se enseñan y se aprenden los hechos o las rutinas de cálculo, sino porque su adquisición es un objetivo a largo plazo que sólo una intencionalidad mantenida en los diseños de instrucción durante todo el período que dura la escolaridad podría hacer que fructificase al final de todo el proceso.

Como ya se ha indicado en comentarios al profesor, las primeras actividades que se presentan pueden servirnos para efectuar un diagnóstico inicial de los conocimientos de los alumnos.

Asimismo, para observar el resultado del proceso de aprendizaje de los alumnos pueden utilizarse algunas de las últimas actividades de la Unidad Didáctica o similares a éstas.

Una de estas actividades de evaluación consiste en proporcionar a los alumnos una hoja de trabajo para que sean ellos quienes elaboren sus problemas, al modo de lo que se propone en la actividad [18]. Si se les anima a que se esfuercen por formular preguntas difíciles, la información resultante puede proporcionarnos una idea del grado de comprensión alcanzado y el nivel de sus avances.

La actividad [22],correspondiente a falsas secciones, presenta unas características muy adecuadas para utilizarla como un instrumento de evaluación. Para explicar las situaciones que se proponen, los estudiantes tienen que recurrir a argumentos que encierran toda la gama de conocimientos que se han ido adquiriendo en el desarrollo del tema.

Otra forma de evaluar la comprensión y el avance de los alumnos y alumnas consiste en formular algunas de las preguntas que les proponemos pero utilizando, ahora, dibujos de cubos con perspectivas distintas a las empleadas. Hay perspectivas del cubo que nos son poco familiares y, por tanto, el hecho de trasladar a ellas lo que ya se conoce en un contexto visual particular representa un esfuerzo de imaginación y de pensamiento considerablemente avanzado.

Las situaciones abiertas, en las que no hay una única respuesta, también son ocasiones muy favorables para informarnos del nivel de profundidad al que cada estudiante es capaz de llegar y pueden servir para ilustrarnos acerca de la capacidad para perseverar en un trabajo y la autonomía personal. Preguntas que pueden servirnos a tal fin pueden ser análogas a la última de la actividad [23] relativa a Tomografías, etc.

Las hojas de actividades que se presentan al final pueden servir para comprobar el grado de transferencia que cada alumno es capaz de utilizar en situaciones nuevas. Lo que puede ayudarnos, al mismo tiempo, a decidir sobre la conveniencia o no de realizar nuevas aproximaciones en el futuro a los temas que hemos estado tratando.

Las observaciones del profesor, recogidas en su diario de clase, sobre las explicaciones verbales de los alumnos, sus intervenciones, la participación en el trabajo de grupo, los cuadernos de trabajo, etc., permiten al profesor seguir el ritmo de avance individual de cada alumno.

Asimismo, estas observaciones deberían ser un elemento evaluador de capital importancia del propio profesor, del proceso de enseñanza y de la coherencia de la Unidad Didáctica. Nos permitirán comprobar si la planificación de la instrucción era la que pensábamos o si es conveniente modificarla.

COMENTARIOS PARA EL PROFESOR

Actividad 1

Con esta actividad se pretende que los estudiantes se acostumbren a describir con precisión y utilizando la terminología adecuada las propiedades o relaciones entre los elementos geométricos de las imágenes creadas. Además, se trata de poner en evidencia que la descripción de una imagen no es unívoca, en el sentido de que genere en las personas receptoras del mensaje verbal o escrito imágenes mentales iguales. Es, por tanto, una actividad de diagnóstico inicial para el profesor o profesora y para los mismos alumnos, en la que habitualmente se pone de manifiesto la dificultad de expresar por escrito o mediante palabras las propiedades o relaciones que se desprenden de las imágenes mentales y la necesidad de unificar los términos a emplear.

Actividad 2

Como la anterior, ésta es una actividad exploratoria y de diagnóstico inicial, que puede servir al profesor tanto para ir desarrollando la capacidad visual de los estudiantes como para detectar los conocimientos que disponen sobre el cubo, afianzar la precisión de algunos términos, etc. Se deberá partir de estos conocimientos y se intentará, en ésta y en las actividades siguientes, que mediante el uso frecuente de los términos matemáticos exactos se llegue a denominar correctamente y de forma precisa los distintos elementos geométricos que se van a estudiar.

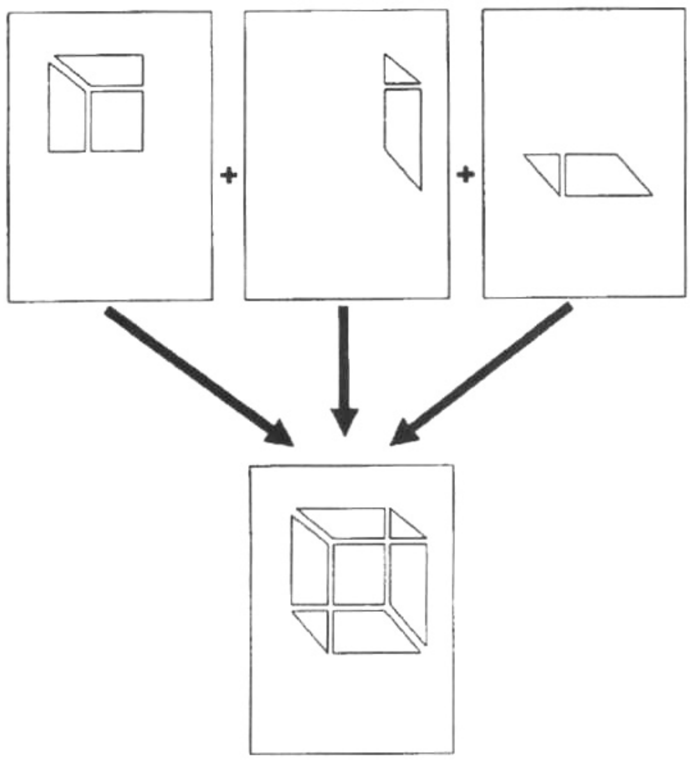
Otras cuestiones, que no están recogidas en las actividades de los alumnos, puede formularlas el profesor al hilo de esta actividad ampliando así las propuestas que hacemos: ¿Cuál es el número máximo de caras que puedes ver en un cubo macizo? ¿Y el de vértices? ¿Y el de aristas? ¿Y el mínimo? Etc.

Actividad 3

Se puede facilitar a los estudiantes diferentes tramas: cuadrada e isométrica, por ejemplo, para que elijan la que consideren más adecuada para hacer los dibujos.

El profesor puede suscitar una discusión sobre lo que son las imágenes y lo que es la realidad. Cualquier tipo de imagen plana de la realidad representa una trampa, los dibujos de Escher y algunos cuadros de Magritte podrían servir de complemento en esta discusión, dando así una visión interdisciplinar del tema y poniendo de relieve un aspecto de las matemáticas que apunta amplias conexiones y preocupaciones culturales. (Ver El *espejo mágico de Escher* de Bruno Ernst, editorial TACO, en particular el capítulo 6: «Dibujar es un engaño»).

El carácter de la representación de un cubo en perspectiva puede ponerse de manifiesto utilizando transparencias superponibles de las figuras siguientes:

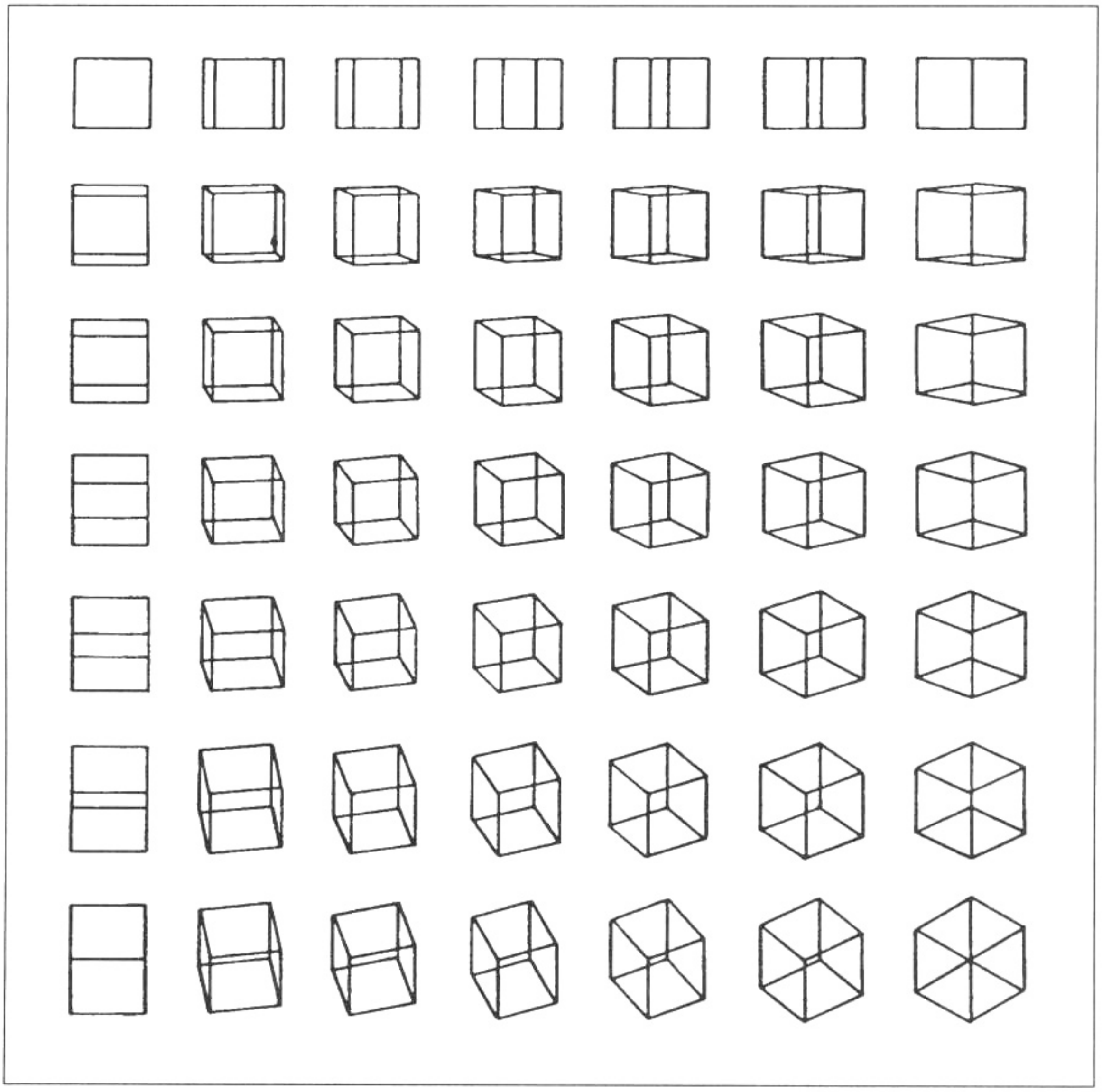


Ajustadas unas con otras, las interpretamos como si se tratase de un cubo, pero basta un pequeño movimiento de las transparencias para que la imagen se descomponga y aparezca una serie de figuras planas.

Puede plantearse, asimismo, a los estudiantes que comparen dos representaciones del cubo: la usual y la isométrica, decidiendo cuál de las dos representa mejor la realidad.

Lo más normal es que la mayoría se incline por la representación usual del cubo, que es a la que están más acostumbrados, pero un análisis más pormenorizado de los elementos significativos del cubo que se mantienen, en una y otra de las representaciones, puede causar sorpresas: ¿Qué representación muestra mejor la igualdad de caras? ¿Cuál la longitud igual de las aristas? ¿La longitud de las diagonales? ¿La igualdad de ángulos? ¿La perpendicularidad? Etc.

La siguiente lámina en la que distintas imágenes de un cubo se van modificando progresivamente en vertical y horizontal puede servir para fomentar la discusión en torno a la representación.



Con una transparencia, el profesor puede suscitar un debate con los alumnos y alumnas acerca de cómo está confeccionada la lámina y las transformaciones que sufren los cubos.

Actividad 4

En esta actividad es fundamental que los estudiantes hagan conjeturas sobre las preguntas que se les formulan y que las contrasten con las de los compañeros. Es una actividad que puede resultar difícil y es conveniente que el profesor o profesora lentamente vaya formulando las preguntas para que con sus sugerencias se genere en los alumnos toda la dinámica de imágenes mentales que se proponen.

La discusión de las respuestas con los compañeros debería dar lugar a que se decidiera cuál es la correcta. Si finalmente algunos alumnos dudar de los resultados y no se llega a un acuerdo entonces, sólo entonces, se puede recurrir a pintar de verdad -y no con la imaginación- un cubo de styrapor y contar directamente.

Actividad 6

La formulación de las preguntas de forma cualitativa y un tanto ambigua responde a una intencionalidad. Las expresiones «más grande» y «más pequeño» aunque se usen con un cierto sentido en el lenguaje cotidiano, desde el punto de vista matemático es necesario, además, especificar con respecto a qué: «más grande en área», «más grande en perímetro», y se espera que los alumnos así lo adviertan.

Es frecuente que, en el proceso de resolución de la actividad, aparezca una preconcepción errónea bastante extendida: al aumentar el área de la figura aumenta también el perímetro. Es la ocasión para plantear preguntas del tipo: ¿En un rectángulo al aumentar el área aumenta también el perímetro? ¿Y en un hexágono? ¿Cómo tienen que serlas figuras para que se cumpla esta afirmación?

Actividad 9

En esta actividad conviene indicar a los alumnos que los puntos que se encuentran sobre las aristas están en el punto medio. Se proporciona un exceso de información para determinar la sección de corte. No obstante, es difícil que los estudiantes, salvo que se les advierta, tengan conciencia de ello y el objetivo de está y las siguientes actividades es precisar esta idea.

Actividades 10 y 11

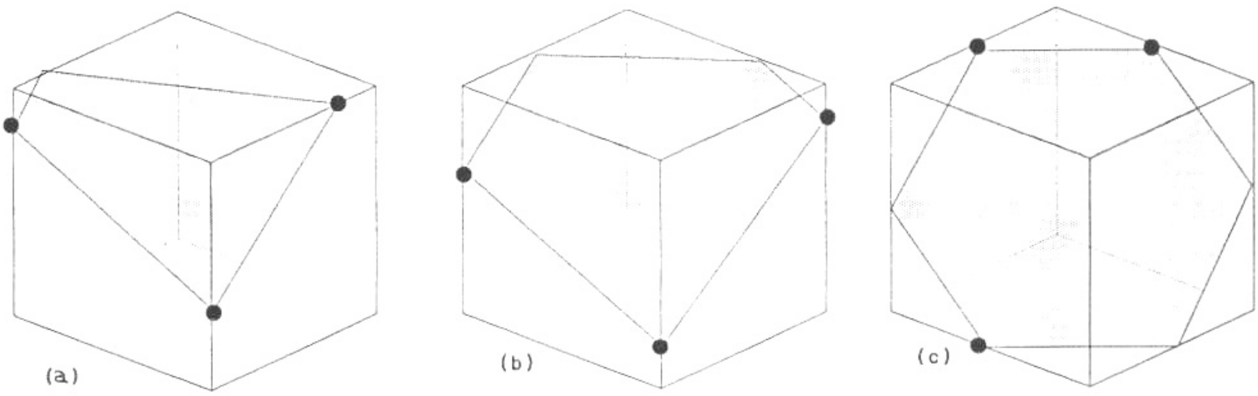
En la actividad 10(a) y en otras similares se puede observar cómo la mayoría de las personas dicen que «falta un cuarto punto».

Parece como si la imaginación visual estuviera pidiendo el punto que corresponde al corte con la arista del cubo, que no se ha dibujado por innecesario. Desde luego que los dibujos condicionan las respuestas y conviene tenerlo presente. El objetivo de estas actividades es poner de manifiesto la afirmación, tantas veces repetida fuera de contexto, de que «tres puntos determinan un plano» no es tan evidente o, al menos, no parece que esta información sea utilizada ágilmente en los contextos reales en que se necesita.

Por último, la actividad [11] sugiere la posibilidad de plantear una investigación al no existir una única sección con los puntos que se proporcionan. Cada profesor o profesora decidirá la conveniencia de proponer estas actividades a toda la clase o sólo como extensiones a aquellos alumnos y alumnas que avancen más rápidamente.

Actividad 12

Los resultados que se obtienen en estos tres casos son:



Los trozos que resultan en la actividad [12c] son iguales. Es posible que los estudiantes interpreten las preguntas al respecto en otro sentido. En este caso, el profesor debería centrar la atención en la idea de igualdad para introducir la noción de módulo y observar que tanto en la sección cuadrada como en la rectangular ocurre lo mismo, así como en el caso de los rombos (actividad [16]). Ampliar la idea de módulo, proponiendo nuevas actividades sencillas sobre ellos podría ser una buena extensión de esta actividad. Al respecto podría utilizarse como material complementario la Carpeta de Recortables Geométricos de J. Carvajal, editada por la Generalitat Valenciana.

Actividad 13

Sería deseable que los estudiantes hagan hipótesis sobre qué hexominós sirven para construir un cubo antes de comprobarlo. Asimismo debería prestarse especial atención a aquellos resultados de carácter general: apreciar que en los que en un punto coinciden 4 cuadrados es imposible construir el cubo. Se pone de manifiesto, también, la relación entre plano y espacio y la posibilidad de utilizar razonamientos en el plano para sacar conclusiones válidas en el espacio, por ejemplo: la relación entre el hecho de que el orden de los vértices de un cubo es 3 (lo que significa que en cada vértice hay 3 caras) y las formas posibles de los desarrollos planos que permiten construir el cubo.

El problema de la colocación de las pestañas puede examinarse desde varios puntos de vista, no sólo en cuanto al número, sino también el lugar donde conviene colocarlas para que la construcción del cubo sea lo más cómoda posible. Un análisis pormenorizado puede llevar al enunciado de una regla general para cualquier cuerpo. Además, los problemas prácticos de esta actividad deben recibir especial atención con objeto de que las construcciones sean lo' más perfectas posibles. Por ejemplo, la construcción es más fácil si la cara más grande del sólido se deja sin pestañas y se pega en último lugar. Pocos alumnos saben de antemano que pasar ligeramente la cuchilla por las futuras aristas del poliedro de cartulina ayuda a doblar y tiene luego su recompensa estética. El profesor tendrá que ayudar en todos estos detalles. Las matemáticas también deberían servir para desarrollar en los alumnos el gusto por el trabajo bien hecho.

Por último, cuando se combinan los módulos hexagonales del cubo, uniendo 8 de ellos por las aristas que quedan del cubo original se obtiene el Sólido de Kelvin: uno de los pocos poliedros que rellena el espacio sin dejar huecos. Esto ofrece la posibilidad de establecer una conexión con los poliedros.

Actividad 14

Es curioso observar lo que les ocurre a la mayoría de las personas con esta actividad: a primera vista, e incluso después de pensarlo, dicen alternativamente que el ángulo formado por las dos rectas es o bien 90°- o bien 454. Muy pocos dan inicialmente la respuesta correcta, 604. Para comprobarla, basta trazar una línea recta que una los extremos de las dos líneas y formar un triangulo equilátero correspondiente.

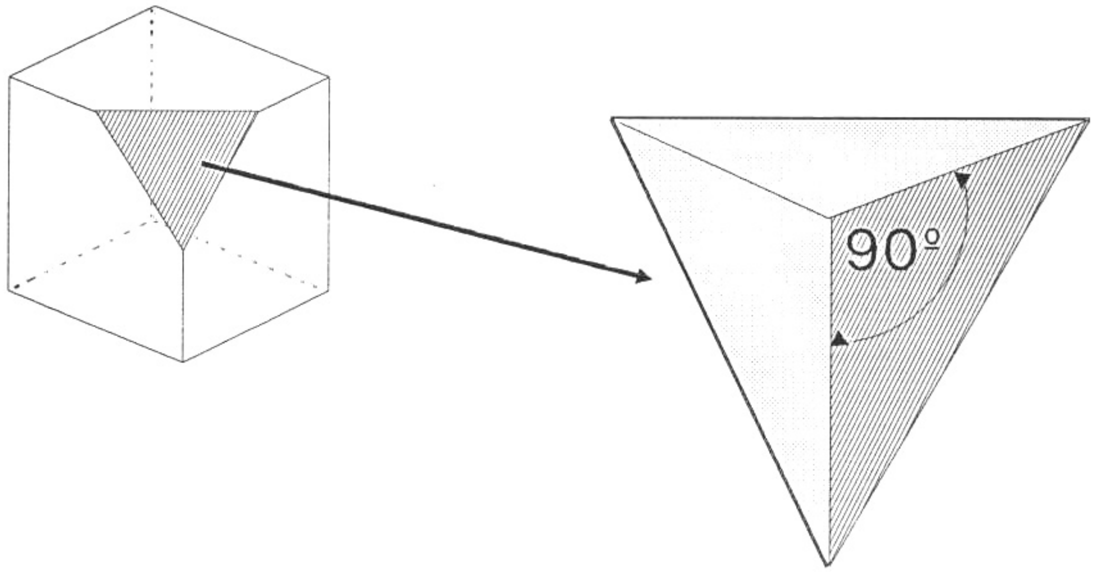
Estas respuestas ponen de manifiesto una de las dificultades asociadas a la comprensión del concepto de ángulo diedro. Parece existir una tendencia muy generalizada a confundir cualquier ángulo trazado sobre las caras de un diedro con el rectilíneo correspondiente y viceversa. Más adelante aparecerán otras situaciones relacionadas con esta dificultad conceptual.

Actividad 15

Con esta actividad pretendemos que se generalicen y consoliden algunos de los resultados anteriores. Suelen presentarse dificultades para expresar tanto verbalmente como por escrito la situación precisa de los puntos de corte para la obtención de triángulos.

Es frecuente que se confunda la sección de corte con alguna de las secciones de las caras resultantes en los trozos del cubo. Por ejemplo, se señalan como válidos triángulos rectángulos como los del dibujo siguiente, que no son los correspondientes a ninguna sección.

Tanto en el caso de los triángulos rectángulos como los obtusángulos suelen presentarse situaciones del tipo apuntado, que tienen, en cierto modo, relación con las dificultades asociadas a la comprensión de los diedros ya señaladas en la actividad anterior. La justificación de la no existencia de triángulos rectángulos, pone de manifiesto múltiples propiedades del cubo que son las que nos van a permitir seguir avanzando en cuestiones de mayor



dificultad. En este sentido, debería animarse a los estudiantes para que justificaran razonadamente estas cuestiones y no conformarse con un empirismo simplificador, consistente en dar por buenas afirmaciones del tipo: «No me salen estos cortes, luego no existen».

Actividad 16

Con esta actividad se pretende que los alumnos realicen una búsqueda sistemática de todos los cuadriláteros que pueden obtenerse como secciones del cubo. En el caso de los cuadrados no evidentes (los que no se obtienen por cortes perpendiculares a alguna de las aristas del cubo) hay una tendencia a pensar que sólo uno de ellos es posible. La situación, además, admite un tratamiento algebraico a la vez que geométrico.

En el caso del rombo, se invierte la forma de preguntar porque como ya se ha señalado, didácticamente resulta más fructífero plantear las situaciones de las formas más variadas posibles. La actividad se convierte, así, en una pequeña investigación.

Una vez obtenido un rombo, la situación se enriquece si se considera la posibilidad de generar nuevos rombos fijando dos de sus puntos-pueden serlos correspondientes a una de sus diagonales y variar los restantes. Aparecen así, de forma dinámica, una familia de rombos y se abren nuevas vías para producir secciones a partir de una dada. Comparando lo que pasa aquí con lo que sucede en las actividades [14] y [20], los alumnos pueden tener una perspectiva dinámica de los cortes, constatando como pequeñas variaciones de los mismos producen diferentes y múltiples resultados, algunos de ellos bastante imprevisibles.

Actividad 17

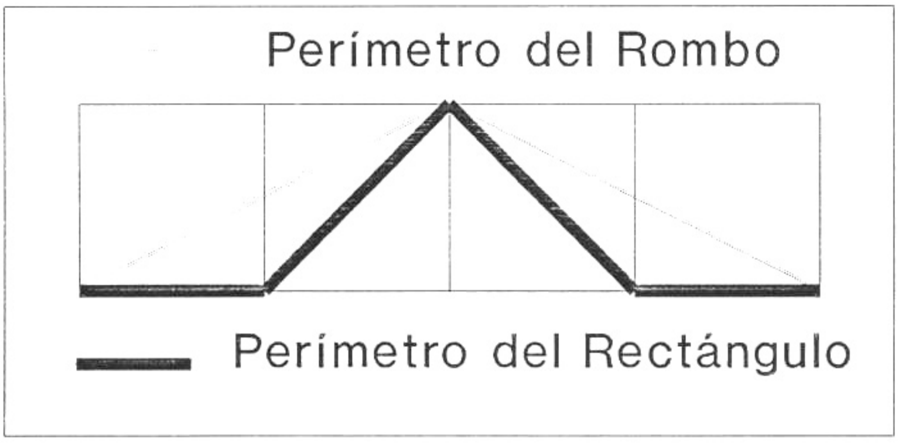
Se propone hacer un resumen de todos los polígonos que se pueden obtener, lo cual permite a los alumnos ordenar los resultados de las actividades anteriores. Algunos son muy simples, pero no por ello evidentes, como se desprende de las dificultades que se presentan al formular conclusiones. Una cosa es saber descriptivamente que el cubo tiene seis caras paralelas dos a dos, y otra diferente es utilizar este conocimiento, en la práctica, para constatar que cualquier pentágono obtenido como sección del cubo tiene cuatro de sus lados paralelos dos a dos y, en consecuencia, es imposible obtener un pentágono regular. O también que, aspectos fenomenológicos que aparecen en todas las actividades anteriores como que los lados de las secciones son las trazas del corte sobre cada una de las caras, es lo que lleva a poder afirmar que son imposibles las secciones de más de seis lados. Sólo un trabajo recurrente en el que estas propiedades aparezcan en diferentes contextos en los que haya que aplicarlas, hará que los alumnos estén en condiciones de ir avanzando en sus conclusiones y resultados.

Actividad 18

Ver el epígrafe de evaluación.

Actividad 19

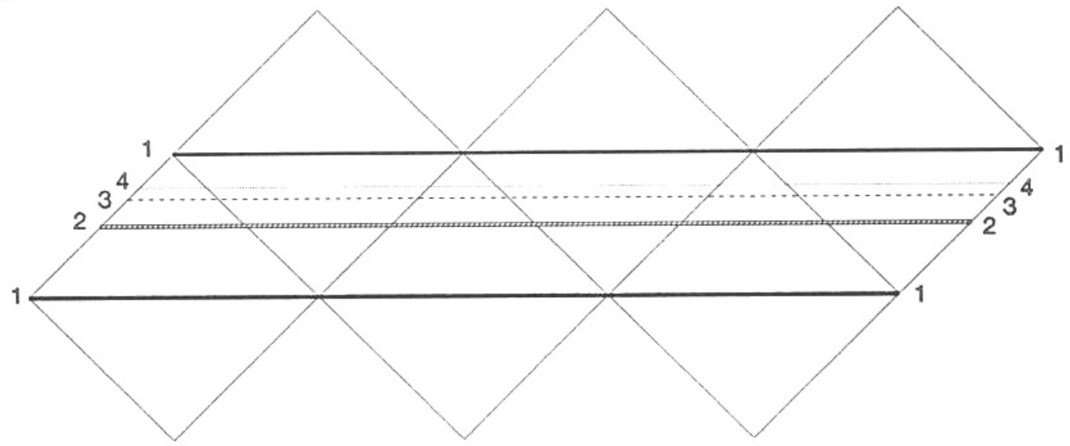
Aunque los valores de los perímetros pueden obtenerse mediante cálculos algebraicos, hay procedimientos geométricos mucho más interesantes porque suponen el empleo de la visión espacial a la vez que resultan más sencillos.



Conviene, no obstante, que se comparen los procedimientos geométricos con los analíticos, valorando el alcance de unos y otros.

Actividad 20

En este problema se vuelve a poner de manifiesto la importancia de utilizar procedimientos geométricos. Después de la actividad anterior, puede pedirse a los estudiantes que averigüen cuánto mide cada perímetro dibujándolo sobre un desarrollo del cubo. No todos los desarrollos se prestan por igual a facilitar el resultado. Es muy útil, en este caso, el desarrollo del cubo de la figura porque permite comparar de inmediato los perímetros. El profesor puede sugerir a los alumnos que utilicen éste, en particular, de los 11 posibles.



1 es el perímetro de los triángulos equiláteros máximos
2 es el perímetro del hexágono regular
3 es el perímetro del hexágono que corta la arista a 1/3 del vértice
4 es el perímetro del hexágono que corta la arista a 1/4 del vértice

Dibujar directamente el perímetro sobre el desarrollo es una actividad mental extremadamente difícil y que pone a prueba las capacidades espaciales de cualquiera. Debería permitirse, en este caso, que los alumnos utilicen un desarrollo del cubo en que los lados de los cuadrados tengan la misma longitud que la arista de los cubos de styropor que emplean. Con este desarrollo pueden envolver completamente el cubo y dibujar los lados de los hexágonos más fácilmente. Convendría que antes de dibujar directamente hicieran una hipótesis mental y luego discutieran los resultados comparándolos con la conjetura inicial.

Actividad 21

Se puede aumentar el nivel de dificultad de esta actividad planteando el problema de forma que en vez de dar como información el cuerpo que resulta al efectuar los cortes, tuviera que determinarse imaginando la situación, de forma análoga a como se hacía en las actividades del principio.

Actividad 22

Las consideraciones que hicimos en la Actividad [3] podrían aplicarse también en ésta que, viene a ser una ampliación de algunos aspectos de aquella. Asimismo, en el apartado de evaluación se hacen algunas matizaciones.

Actividades 23 y 24

Con estas dos actividades se pretende poner de manifiesto la importancia y utilidad, en determinadas situaciones de la vida real, de algunas cuestiones geométricas tratadas en este tema.

La técnica de la tomografia resultará familiar a los alumnos después de los ejercicios que han estado realizando. En caso de que surjan dificultades para interpretarlas, pueden utilizar sólidos de plastilina con los que elaborar sus propias tomografías, que ayudarán a comprender mejor las que aquí se presentan.

Para calcular el cubo de oro es preciso suministrar a los alumnos un dato adicional: el peso de un metro cúbico de oro. Se espera que éstos descubran la falta del dato. Un metro cúbico de oro pesa 19.500 kilos.

Actividades complementarias

Con las hojas de trabajo complementarias, el profesor puede comprobar si los alumnos y las alumnas que han avanzado más en el desarrollo de sus capacidades espaciales están en condiciones de transferir lo que han aprendido, en el caso del cubo, a situaciones geométricas diferentes.

Bibliografía

CARRILLO, E., HERNÁN, F. (1988): Recursos en el aula de matemáticas. Madrid. Síntesis.

CARROL, W.M.: «Croos Sections of Clay Solids». *Arithmetic Teacher.* Vol. 35, 6-11, 1988. Las hojas de trabajo para los cortes con sólidos distintos del cubo tienen su origen en este artículo y son una adaptación de las ideas aquí propuestas.

FIELKER, D.S. (1987): Rompiendo las cadenas *de Euclides.* Madrid. Ministerio de Educación y Ciencia.

GRUPO CERO (1988): *De 12 a 16. Un* proyecto *de currículum de* matemáticas. [Libros de actividades de 7°- de EGB y 1°- de BUP.] Generalitat Valenciana. Valencia. Las ideas y estructura de alguna de las actividades que proponemos se han tomado directamente de este trabajo.

GUILLÉN, G. (1991): *Poliedros.* Madrid. Síntesis.

HERNÁN, F. (1991): Retrato de una profesión imaginada. Granada. Proyecto Sur. El capítulo VI dedicado alaImaginabilidad constituye, sin lugar a dudas, una de las aportaciones teóricas más interesantes y originales que hemos tenido ocasión de leer en torno al tema de la visión espacial, del que somos especialmente deudores.

WHEATLEY, G.H.: «Spatial Sense and Mathematics Learning». *Arithmetic Teacher.* Vol. 37, 10-11, 1990. Especialmente, todo este número de la revista está dedicado monográficamente a plantear actividades sobre el sentido espacial y de él hemos tomado las principales ideas para la fundamentación teórica del trabajo.

El trabajo que vas a realizar está relacionado con la geometría y, en particular, trata del cubo. Necesitarás cubos de styropor (corcho blanco), cutter, tijeras e instrumentos de dibujo.

Para empezar sólo necesitas tu imaginación.

Actividad 1

Piensa en un cuerpo geométrico que te resulte familiar, el que quieras. Trata de imaginártelo mentalmente. Escribe brevemente cómo lo «has visto» en tu imaginación y señala algunas de sus propiedades y características. Puedes hacer un dibujo que acompañe a lo que escribas. Describe a un compañero el cuerpo que has imaginado y pídele que trate de imaginarlo a su vez. Discute con él, después, cómo lo habéis imaginado cada uno.

Una de las actividades de la imaginación es la de crear imágenes. Buena parte de lo que te vamos a proponer a continuación tiene por objeto que construyas tus propias imágenes mentales.

Actividad 2

No dibujes nada. Limítate a imaginar. Imagina un cubo, cierra los ojos si lo prefieres para imaginarlo. A veces, así se consiguen mejores resultados.

¿Cómo lo imaginas?

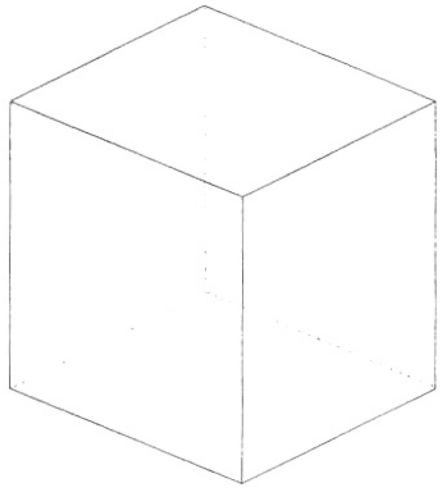
¿Cuántas caras tiene?

¿Cuántas le puedes ver cuando lo imaginas?

¿Cuántas aristas tiene? ¿Cuántos vértices?

Actividad 3

Aquí tienes otra «imagen» del cubo, es un dibujo en perspectiva.



Es posible que al imaginar un cubo lo hayas «visto» muy parecido al del dibujo o quizás de otra forma. De hecho, un cubo puede observarse desde muchos puntos de vista. Trata de imaginar de nuevo el cubo en otra posición distinta de la anterior y de la del dibujo y haz también el dibujo tal como lo «ves» ahora.

Mueve el cubo lentamente, sólo con tu pensamiento (con la imaginación). Continúa moviendo el cubo hasta situarlo en otra posición de tal forma que lo «veas» distinto de las anteriores situaciones. Dibuja cómo «ves» el cubo en esta última posición.

Compara con tus compañeros los diferentes dibujos del cubo y los puntos de vista desde los que se han imaginado. Discute con ellos cómo lo has «visto tú» y cómo lo han visto ellos. En particular, puedes responder si lo has imaginado hueco o macizo, de frente o de lado, flotando en la imaginación o apoyado sobre una mesa, etc.

Comentarios

La imaginación es libre y cada uno recrea sus propias imágenes de la realidad. De una misma cosa se pueden fabricar múltiples imágenes mentales y hacer dibujos desde diferentes perspectivas o puntos de vista. Un mismo objeto puede ser imaginado de forma distinta por diferentes personas. Lo más interesante es que, a pesar de esto, las propiedades y características de los objetos no se modifican más que en nuestra imaginación. Así que si se trata de estudiar propiedades de un cubo, aunque cada uno de nosotros lo imaginemos de una manera distinta, los resultados finales serán los mismos.

Actividad 4

Seguimos imaginando.

Supón que el cubo que imaginas ahora es sólido, de styroporpor ejemplo. Fíjate en uno de sus vértices ¿Cuántas aristas van a ese vértice? A continuación, puedes también imaginar que tienes un rotulador y pintas con él un vértice del cubo. Luego, siguiendo una de las aristas del vértice que has pintado, pasa a un vértice vecino y pintas también este vértice. Así tienes un cubo en el que una de sus aristas está pintada en cada extremo.

Trata de responder a las siguientes preguntas:

¿Cuántas aristas del cubo tendrán pintado de negro un extremo solamente?

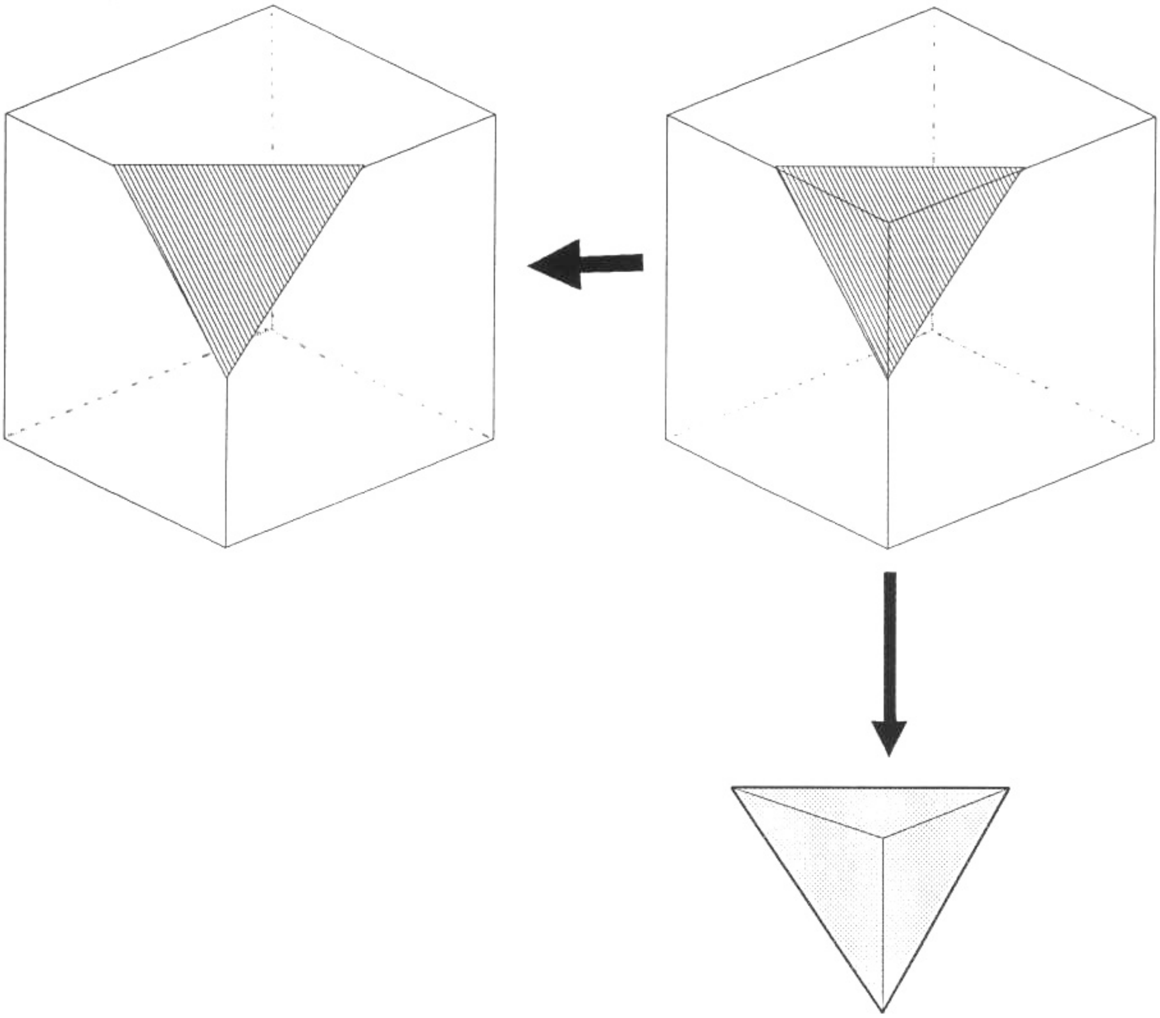
¿Cuántas aristas del cubo no tienen pintado ninguno de sus extremos?

¿Cuántas caras del cubo tienen pintura en alguno de sus vértices? ¿Cuántas caras no tienen pintura?

Discute las respuestas con tus compañeros.

Actividad 5

Imagina de nuevo un cubo de styropor. En un vértice concurren tres aristas. Toma el punto medio de cada una de las aristas. Fíjate en los tres puntos medios: si cortas el cubo con el cutter, dando un corte plano que pase por los tres puntos, el cubo se partirá en dos trozos. Intenta hacer un dibujo del trozo pequeño desde otra perspectiva y describe las propiedades de este cuerpo.



La zona por donde has ido dando el corte es igual en el trozo grande y en el pequeño: si los vuelves a pegar por este sitio recompones de nuevo el cubo.

Si mojas con pintura el trozo grande por el sitio por el que has cortado y estampas en un papel obtienes un triángulo. ¿Cómo es ese triángulo?

La misma figura se obtendría si hubieses estampado después de mojar por la zona de corte del trozo más pequeño.

Comentarios

Hay una gran variedad de cortes posibles. Se pueden diferenciar unos de otros por el polígono que resulta en el interior del cubo.

Cuando cortamos un cubo, dando un corte plano, a la figura que aparece en la zona del corte que separa los dos trozos se le llama *sección de corte.*

En el caso anterior, la sección de corte es un triángulo equilátero.

Al cortar otros sólidos distintos del cubo también ocurre algo parecido. Si cortas una vela con un cuchillo perpendicular a su mecha, por ejemplo, la sección de corte es un círculo.

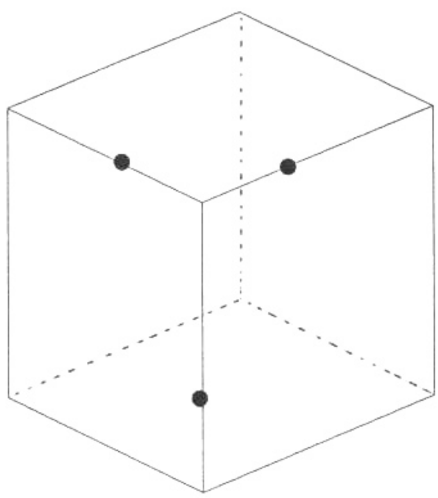
A partir de ahora vas a cortar cubos por sitios diferentes y te vas a fijar principalmente en las formas que tienen las secciones de corte.

Actividad 6

¿Cómo habría que cortar el cubo para que la sección sea un triángulo equilátero más pequeño que el anterior? ¿Y más grande? ¿Cuál es el triángulo equilátero más grande de todos los que puedes obtener al cortar?

Actividad 7

Si cortas de forma distinta puedes obtener figuras muy variadas. Supón que hemos cortado el cubo pero sólo sabemos de este corte que pasa por los tres puntos que hay indicados en el dibujo (dos de ellos están a igual distancia de los vértices).



¿Qué figura sale?

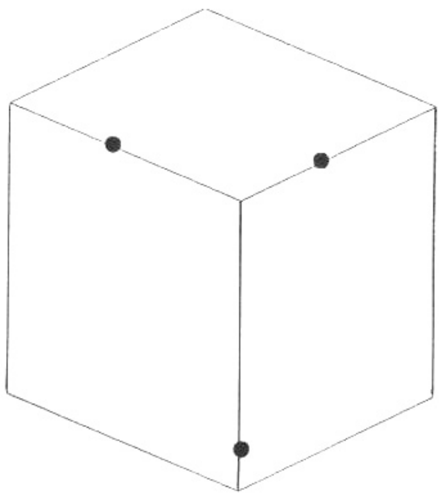
Si no estás del todo convencido de lo que piensas que ocurre, puedes comprobarlo cortando realmente el cubo con el cutter. Pero antes de hacerlo te sugerimos que hagas otras cosas:

1. Resulta útil dibujar la sección en el cubo de la hoja de actividades intentando imaginar sobre el dibujo por dónde pasaría el corte.
2. Discute con tus compañeros los resultados de cada uno para ver si hay un acuerdo.
3. Por último, si no hay acuerdo o si dudáis del resultado: se corta y se comprueba. Pero sólo en último extremo.

Como ves, el trabajo puede resultar muy fácil si sólo te limitas a cortar el cubo, a comprobar lo que se te pregunta y dar la respuesta. Pero esto no tiene mucho interés. De lo que se trata es que llenes la cabeza de cubos y que pongas en marcha la imaginación, que dibujes, que discutas con los compañeros tus pensamientos y lo que vayas imaginando. Trata de buscar argumentos para convencerles de lo que has pensado. Al principio te puede resultar un poco difícil, pero poco a poco, a medida que vas pensando cosas e imaginando soluciones observarás que cada vez se imagina mucho mejor.

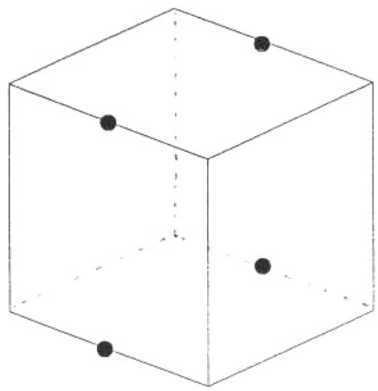
Actividad 8

¿Qué figura se obtiene si se sabe que el corte pasa por los puntos del dibujo?

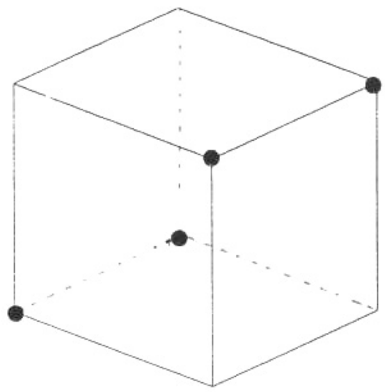


Actividad 9

¿Qué figura resulta al cortar, ahora, por estos puntos?



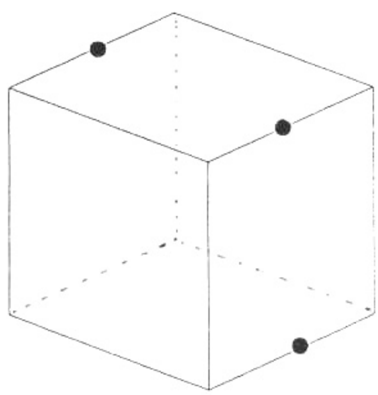
(a)



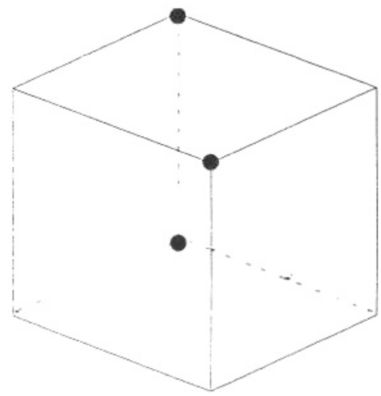
(b)

Actividad 10

¿Qué figura se obtiene con estos cortes?



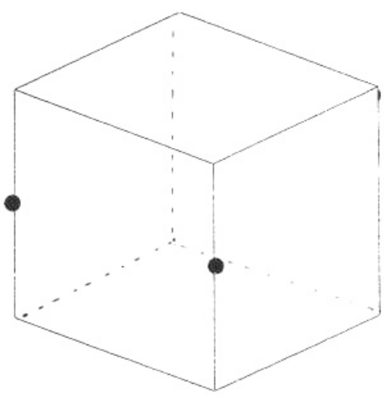
(a)



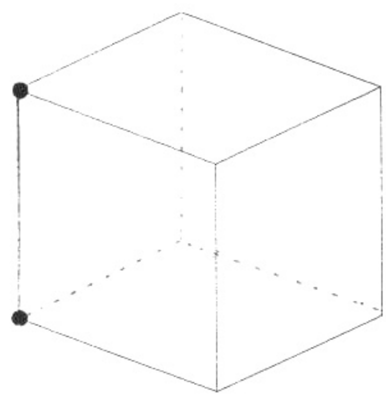
(b)

Actividad 11

¿Qué es lo que pasa en estos casos?



(a)



(b)

Comentarios

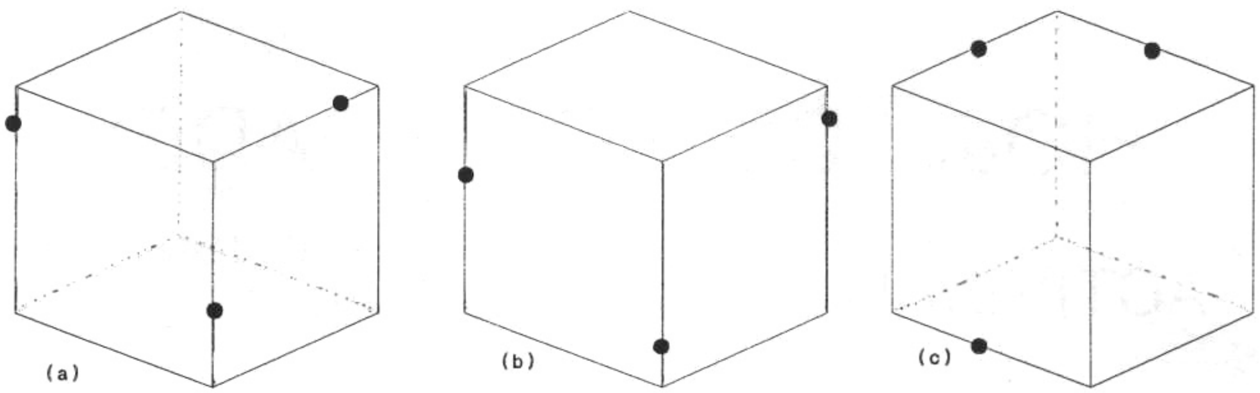
Puedes observar después de cortar y comparar que los resultados de tus compañeros pueden ser variadísimos. Esto no ocurre en los otros casos vistos anteriormente. ¿Por qué?

¿Crees que existe alguna relación entre el número de puntos que están dibujados en cada cubo y el hecho de que se obtenga o no la misma figura?

¿Cuál es el mínimo número de puntos que necesitas para tener seguridad de que la sección de corte siempre es la misma?

Actividad 12

Si se sabe que el corte pasa por los puntos del dibujo, ¿qué figuras resultan en cada caso?



¿Cómo son en el caso (c) los dos trozos de cubo resultantes? ¿En qué otras actividades anteriores ocurrían cosas parecidas a ésta?

HOJA DE ACTIVIDADES

ACTIVIDAD	SECCION PREDICHA	SECCION RESULTANTE