

Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? Aportaciones de la investigación

JORDI DEULOFEU*

El fin último de la investigación en educación matemática debe ser la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje, pero la transferencia entre los resultados de la investigación y la realidad del aula es, en general, muy lenta y a veces escasa. Sin embargo, en el campo de las funciones, las investigaciones de los últimos veinte años han incidido de manera significativa en los currículos, en muchos materiales didácticos y también (?) en las aulas. Aspectos como el papel de los lenguajes (en particular el gráfico), el trabajo con situaciones contextualizadas, el binomio cualitativo-cuantitativo, la secuencia: estudio de modelos particulares - análisis general de funciones, o el papel del ordenador, que a mi entender son los más relevantes en este tema, han experimentado cambios en los últimos años que esta ponencia pretende analizar.

Introducción

Si entendemos la Didáctica de las Matemáticas como una disciplina fundamentalmente aplicada, resulta que el fin último y primordial de la investigación en educación matemática debe ser la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje. No obstante, la evolución de dicho proceso nos indica que la transferencia entre los resultados de la investigación y la realidad del aula es, en general, muy lenta y a veces escasa. En realidad continúa existiendo un auténtico agujero entre la investigación y la práctica diaria en el aula que, ya en 1980, Freudenthal planteaba como un problema fundamental de la educación matemática y que, recientemente, destacaba De Lange (2001) en la inauguración del PME 25 celebrado en Utrecht.

Sin embargo, me atrevo a afirmar que, en cierta medida, en el campo de las funciones la situación es algo distinta, y acaso excepcional, puesto que las investigaciones de los últimos veinte años han incidido de manera significativa en los currículos y en muchos materiales didácticos, produciendo un cambio de enfoque del tema, especialmente en los primeros niveles (14-16 años), que en nuestro país se reflejó principalmente en el Diseño Curricular Base para la ESO (MEC, 1989).

El inicio de dichas investigaciones puede situarse en el primero de los trabajos de Janvier (1978), su tesis doctoral, donde se plantea la importancia del uso de situaciones contextualizadas, el papel preponderante del lenguaje gráfico en la introducción a las funciones y las dificultades que un uso restrictivo de las gráficas (exclusividad de las tareas de traducción: ecuación – tabla – gráfica) plantean a los alumnos, en la interpretación y construcción de gráficas y en la conceptualización de las funciones.

También en este trabajo pionero se incide en la importancia de introducir un tratamiento cualitativo, paralelo al cuantitativo, como vía para superar una interpretación restrictiva de las gráficas dada por la automatización de los ejercicios que plantean el paso de la ecuación al gráfico a través de la tabla, y por primera vez se discute la importancia de los distintos lenguajes utilizados en el trabajo con funciones, así como el carácter de traducción de la mayoría de las actividades propuestas, proporcionando un valioso instrumento de análisis de dichas actividades (ver Azcárate - Deulofeu, 1990). En pocas palabras, en este trabajo de Janvier se halla el germen de los cambios más importantes en el campo de las funciones, en lo que se refiere a su etapa inicial, que se sitúa principalmente en el segundo ciclo de la ESO.

Numerosos trabajos posteriores del propio Janvier, que presentó sus investigaciones en las primeras JAEM (1981), hace exactamente veinte años, y de Bell y Janvier (1981), todos ellos en el marco del Shell Centre de Nottingham, analizaron el papel del lenguaje gráfico y su relación con los otros lenguajes y culminaron con la publicación de un libro (Janvier, editor, 1987) en el que la idea de representación escapaba ya del ámbito de las funciones, y se adentraba en el amplio marco de la enseñanza de las matemáticas.

Un hecho especialmente remarcable fue que, como resultado de estas investigaciones, se publicaron otros tantos trabajos, que podríamos llamar de innovación, en los que se proponían novedosas actividades de aprendizaje especialmente en relación con el lenguaje gráfico (Swan, 1982) que pasó a ocupar un lugar relevante, además de interesantes concreciones en proyectos (South Notts Project, 1983). Desde mi punto de vista, fue la publicación de estos trabajos, en los que se concretaban las ideas y los resultados de las investigaciones en propuestas de aprendizaje para la Educación Secundaria, la que tuvo una mayor incidencia en la transformación de la enseñanza de las funciones, es decir, fuera del estricto ámbito de la investigación, y preparó el terreno para los cambios curriculares que fueron gestándose en la década de los ochenta. Me atrevería a decir que la publicación en castellano del trabajo de Swan (Shell Centre, 1990), fue uno de los hechos que más influyó en los cambios curriculares en nuestro país.

Aunque, desde mi perspectiva, considero que el conjunto de trabajos de investigación desarrollados en el Shell Centre es, no sólo el pionero, sino el más importante en el campo de las gráficas de funciones, durante la década de los ochenta se realizaron otros muchos trabajos de investigación, principalmente en el ámbito anglosajón y también en Israel. Una recopilación de los más significativos, ampliamente comentada y criticada, se encuentra en el excelente trabajo de Leinhardt - Zaslavsky y Stein (1990), que constituye un magnífico *review* del enorme trabajo realizado en este campo en poco más de una década. La mayoría de estos trabajos se centran en dificultades concretas del alumnado al tratar de conceptualizar la idea de función, la ampliación de dicho concepto más allá de las funciones lineales, la idea de dependencia determinada por un gráfico o las diferencias entre continuo y discreto (en particular los problemas de continuidad de la recta real al asignar coordenadas a los puntos), tanto en situaciones contextualizadas como estrictamente matemáticas.

También en nuestro país, aunque en tiempos más recientes, las investigaciones sobre funciones y gráficas han sido numerosas y significativas, dando lugar a diversas tesis doctorales (Azcárate, 1990; Deulofeu, 1993; Ruiz Higuera, 1993; Lacasta 1995; Font, 1999; entre otras), y a numerosas tesis de maestría. La mayoría de estos trabajos, partiendo de marcos teóricos a veces muy distintos, ponen de manifiesto las dificultades de los alumnos y la nece-

sidad de un cambio de enfoque del tema, cambio que en muchos aspectos ya se contempla en las programaciones de la Reforma (MEC, 1989).

En esta ponencia, vamos a tratar de analizar algunos de estos cambios, influidos sin duda por las investigaciones mencionadas, centrando nuestra reflexión en diversos aspectos relativos al desarrollo del tema para los cuales no parece todavía existir un acuerdo generalizado, también en aquellos que, en general, no han quedado suficientemente desarrollados en la mayoría de los proyectos de desarrollo del currículo para la ESO y finalmente, aquellos ante los que se plantean nuevos retos en el momento actual, puesto que, si bien la investigación didáctica en su conjunto ha aportando mucha información, también es cierto que se ha centrado en la mayoría de los casos en aspectos cognitivos y de aprendizaje, y muchos menos, como destaca Leinhardt (1990), en los aspectos de enseñanza.

Funciones, ¿para qué?: una relectura del currículo de la ESO

Han pasado cerca de 12 años desde la publicación de los nuevos currículos para la ESO (MEC, 1989), tiempo suficiente para realizar un primer análisis sobre su implantación y evolución. En ellos se dedica un apartado al tema de las relaciones funcionales, dentro del llamado bloque 4, que lleva el título general de tratamiento de la información, y que consta de dos grandes apartados: las relaciones entre magnitudes de tipo estadístico y las de tipo funcional, consideradas como aquellas que se obtienen al analizar las relaciones de tipo causal entre magnitudes.

Esta estructura del bloque 4, centrado en el tratamiento de la información, representa una novedad con relación al currículo anterior; no obstante, una primera constatación es que esta organización de los contenidos, que sitúa en un mismo bloque aspectos estadísticos y funcionales, separando los primeros del azar y la probabilidad, a la cual se dedica el siguiente bloque de contenidos, no ha sido tenida en cuenta, en general, en los textos y materiales didácticos publicados para la ESO. Es cierto que tanto los aspectos estadísticos como los funcionales resultan de la modelización matemática de fenómenos en los que aparece una relación entre magnitudes y, por lo tanto, hay puntos en común tanto en las situaciones de partida como en los lenguajes de representación utilizados, en particular tablas y gráficas, lo cual justificaría, en cierta medida, esta organización; pero también lo es que los conceptos matemáticos subyacentes son de una naturaleza totalmente distinta, dando lugar a ramas de las matemáticas muy diferentes, y que las principales relaciones con otros bloques de contenidos son también claramente distintas.

Así, entendemos que la mayoría de las propuestas de implementación del currículo ha llevado a considerar las funciones dentro de la ESO prácticamente como un bloque independiente y con entidad propia. A mi entender el problema didáctico principal no radica en esta estructuración, que en líneas generales comparto, sino, fundamentalmente, en la finalidad que se persigue al desarrollar el tema de funciones en una etapa determinada, en particular en la ESO, la última etapa de la educación obligatoria, donde deben compatibilizarse unos objetivos válidos para la mayoría de la población (y en los cuales, sin duda, debe centrarse la enseñanza) con una preparación para aquellos alumnos que, posteriormente, seguirán sus estudios de matemáticas en el bachillerato.

Este aspecto, seguramente común a la mayoría de los bloques, es especialmente importante en el campo de las funciones, que en la ESO, etapa que podemos llamar de transición entre

la matemática elemental y la avanzada, siguiendo a Calvo (2001), ocupa un lugar de introducción, pero que en las matemáticas del bachillerato adquirirá una relevancia mucho mayor.

La cuestión sobre las finalidades de la enseñanza de las funciones en la ESO es, a mi entender, muy compleja pero fundamental. En primer lugar, hay que tener en cuenta que se enmarca en una discusión mucho más general sobre las finalidades de la enseñanza de las matemáticas en la etapa obligatoria, y las recientes aportaciones sobre la caracterización del término competencia, y su aplicación al debate sobre las finalidades y los cambios curriculares, están empezando a aportar interesantes propuestas para el desarrollo del currículo (Abrantes, 2001).

En el caso concreto de las funciones, y sin entrar a considerar las competencias básicas, entiendo que una dificultad fundamental se plantea al tratar de compatibilizar la adquisición de unos procedimientos básicos relativos, principalmente, al lenguaje numérico y gráfico (fundamentalmente interpretar y construir, así como traducir de un lenguaje a otro), indispensables para cualquier alumno, donde las funciones se encuentran todavía en un estado primitivo y son tratadas principalmente como procesos, con una introducción al concepto de función y al conjunto de conceptos matemáticos relacionados con éste, de carácter mucho más conceptual y centrado en las matemáticas y, al mismo tiempo, capacitar al alumnado para utilizar las funciones elementales en la resolución de situaciones y problemas contextualizados, introduciendo, además, el lenguaje algebraico.

En este proceso de aprendizaje aparecen numerosas dificultades, de índole muy diversa, que en la actualidad los resultados de las investigaciones realizadas en los últimos 20 años nos permiten conocer con bastante precisión, pero cuya superación dependerá, en buena parte, de las propuestas didácticas que se presenten a los alumnos y de su gestión en el aula, y en este punto, las investigaciones realizadas son, desde mi punto de vista, más limitadas y, sin duda, mucho menos concluyentes.

En los apartados siguientes abordaré algunos de los aspectos que considero más relevantes, tratando de relacionarlos con las dificultades principales que se presentan en el alumnado.

Funciones, ¿cómo?: punto de partida y aspectos clave

Al plantear una posible secuencia de aprendizaje de las funciones en la ESO, se plantean numerosos interrogantes, de índole diversa, entre los cuales considero especialmente relevantes los siguientes: ¿Cuál es la relación que debe establecerse con los temas ya tratados? ¿Cómo introducir y relacionar los distintos lenguajes implicados y cuáles deben ser preponderantes? ¿Cómo lograr un equilibrio entre el trabajo cualitativo y el cuantitativo, y cuál debe ser el papel de ambos? Veamos algunas reflexiones sobre cada uno de estos interrogantes.

El estudio de funciones en la ESO, ¿un tema aislado?

El hecho de que el estudio de la dependencia entre variables sea un tema nuevo que se plantea en un momento determinado de la ESO, generalmente en el segundo ciclo, y que requiere la introducción de lenguajes y formas de simbolización nuevas, desconocidos hasta entonces por los alumnos, puede hacer pensar que se trata de un tema que no guarda relación con otros previamente trabajados y, de hecho, ésta es la sensación que se tiene cuan-

do se analizan muchos de los textos actuales. Basta para ello, a modo de ejemplo, analizar el tratamiento que se hace al introducir la función lineal y constatar que la relación con la resolución de problemas de proporcionalidad, tema habitualmente tratado con anterioridad, tanto desde un punto de vista aritmético como geométrico (muchas veces también sin relación entre ambos), es escasa, cuando no inexistente.

Entiendo que es imprescindible tratar de establecer esta relación y mostrarla explícitamente a los alumnos, algo que puede y debe hacerse no sólo al tratar la función lineal sino también otros modelos elementales (la función cuadrática y el área, la función cúbica y el volumen, e incluso la función exponencial y las potencias), fundamentalmente por cuatro motivos:

- Para mostrar una concepción unitaria de las Matemáticas, que permita relacionar problemas y conceptos aparentemente dispares (¿cómo relacionaremos las matemáticas con otras ciencias si separamos distintas partes de las matemáticas y no las relacionamos entre sí?).
- Para desarrollar competencias básicas generales a través de actividades de aprendizaje propias del tema funciones pero que también es posible desarrollar desde otros temas ya tratados con anterioridad.
- Para consolidar conceptos y procesos de la aritmética, la geometría o la medida que, a diferencia de ciertos aspectos funcionales tratados a nivel de introducción, deberían quedar plenamente adquiridos al finalizar la ESO.
- Para utilizar situaciones y problemas de la aritmética, la geometría o la medida, ya conocidos por el alumnado, como uno de los puntos de partida para el trabajo con funciones.

Permítaseme volver al ejemplo de la función lineal. Sabemos que la comprensión de este modelo de función pasa por una correcta interpretación de la idea de pendiente en los distintos lenguajes de representación de dicha función (tabla, gráfico, fórmula), y una relación entre los mismos, pero no podemos olvidar que dicho concepto fue interpretado y utilizado anteriormente por los alumnos, como la constante o la razón de proporcionalidad en la resolución de problemas aritméticos y geométricos. Sin esta relación, la comprensión del modelo es incompleta (acaso inútil) y con ella, no sólo completamos la idea de proporcionalidad, un concepto clave de las matemáticas de la ESO, sino que, además, mostramos la relación entre unas situaciones resueltas con anterioridad y un nuevo concepto, lo que por un lado da una nueva dimensión a aquéllas y por otro favorece la interpretación de éste.

Relación entre lenguajes

Sin duda, la formación del concepto de función pasa en gran medida por la relación que se establece entre los distintos lenguajes de representación de las funciones, de los cuales, el numérico (presentación de las funciones en forma de tablas) es el más elemental (aunque también el más limitado) y el gráfico el que permite un tratamiento más amplio y versátil. De acuerdo con esto, comparto el enfoque que se plantea en el Diseño Curricular Base (MEC, 1989) cuando se dice que, «sobre todo en los primeros años de la etapa, se aboga por un tratamiento gráfico de las relaciones funcionales, recurriendo más adelante a expresiones algebraicas sólo cuando lo aconseje su simplicidad y el uso que va a hacerse de ellas. Esta orientación permite trabajar con una amplia gama de gráficas, sin necesidad de limitarse a las que tienen una expresión algebraica sencilla» (pag. 512).

Sin embargo, creo que, de la misma manera que se debe promover el uso de gráficas, al cual me referiré con más detalle en el próximo punto, no se ha prestado, en general, suficiente atención al uso de tablas que podría, desde mi punto de vista, presentarse como punto de partida del tema y, posteriormente, utilizarse como una primera caracterización de los distintos modelos elementales de dependencia funcional. Argumentos favorables al uso de tablas van desde la facilidad que encuentran los alumnos al trabajar con ellas, en comparación con otros lenguajes, hasta las relaciones aritméticas que pueden establecerse (por ejemplo, los números cuadrados como suma de los números impares), pasando por la propia historia de las matemáticas (el uso de tablas para determinar leyes que permitieran la predicción de fenómenos astronómicos, lo que podríamos llamar la prehistoria de las funciones, se encuentra ya en los babilonios). Sin embargo, no faltan peligros en este tipo de trabajo, especialmente la discretización (y limitación) que supone el uso de tablas, que puede subsanarse con un adecuado trabajo con las gráficas.

Por otra parte, una de las tareas que se deberían abordar es la de caracterizar los modelos elementales de crecimiento: proporcional, cuadrático y exponencial, tanto en situaciones contextualizadas como estrictamente matemáticas. Esta caracterización, que en general se realiza tanto a partir del gráfico como de la expresión algebraica asociados a la función, no suele abordarse a partir del uso de tablas, y resulta especialmente interesante ver qué sucede con los sucesivos incrementos de la variable dependiente, para incrementos iguales (por ejemplo unitarios, aunque no es necesario) de la variable independiente.

Veamos, a modo de ejemplo, una actividad descontextualizada del trabajo con tablas que representan relaciones funcionales:

x	1	2	3	4	5	x	1	2	3	4	5	
y	6	12	18	24	30	y	1	4	9	16	25	
		6	6	6	6			3	5	7	9	
		0	0	0				2	2	2		
x	1	2	3	4	5	x	1	2	3	4	5	
y	9	13	17	21	25	y	6	12	24	48	96	
		4	4	4	4			6	12	24	48	
		0	0	0				6	12	24		
x	1	2	3	4	5	6						
y	1	8	27	64	125	216						
		7	19	37	61	91						
			12	18	24	30						
				6	6	6						

¿Qué semejanzas y diferencias hay entre los crecimientos de la variable dependiente de cada una de estas tablas? ¿Cuáles crecen más rápidamente y cuáles menos?

Trabajo cualitativo versus cuantitativo

Sin duda, una de las principales aportaciones de la investigación se refiere a las limitaciones que supone, para el aprendizaje del lenguaje gráfico, un tratamiento cuantitativo al mismo tiempo que una restricción de las tareas relacionadas con dicho lenguaje a la representación de gráficas a partir de fórmulas (y podríamos añadir, a partir de tablas). Numerosos obstáculos derivados de la representación punto a punto, entre los que destaca la interpretación de la dependencia determinada por una gráfica cartesiana, a partir de un conjunto de puntos relevantes de la misma, han sido estudiados y explicitados por dichas investigaciones. Para superar dichas dificultades se ha sugerido (Shell Centre, 1990) la importancia de un trabajo cualitativo y, a la vez, global basado tanto en la interpretación como en la construcción (esbozos) de gráficas de situaciones contextualizadas y no cuantificadas.

Un análisis de los textos actuales en nuestro país muestra que, en general, no se ha tenido suficientemente en cuenta estas recomendaciones. En muchas ocasiones, si bien se encuentran actividades relacionadas con el estudio cualitativo de gráficas, éstas aparecen en temas introductorios, a edades tempranas y sin que quede nada claro cuál es el objetivo del mismo, más allá de una primera familiarización con el lenguaje gráfico, de modo que, cuando se entra en el estudio de los modelos funcionales, este tipo de actividades desaparecen por completo.

Por el contrario, un análisis de dichas actividades muestra su complejidad y el interés que tienen, no sólo para una correcta interpretación de la dependencia determinada por una gráfica, sino también para el estudio de los distintos tipos de variación de una función, por lo que su introducción debería, a mi entender, relacionarse y alternarse con el trabajo cuantitativo.

A modo de ejemplo, basta considerar la conocida actividad del trazado de gráficas que relaciona el volumen y la altura de un líquido en una botella, al variar las formas de dicho recipiente. En un primer nivel, se trata de distinguir cuándo las gráficas (formadas por segmentos rectos) crecen más rápidamente; en un segundo, la distinción entre segmentos rectos y curvas (y la concavidad de las mismas); en un tercero, que sucede en los cambios de variación de la función, y en un cuarto, de evidente complejidad (y no abordable en la ESO), la distinción (y su posible caracterización) entre los tipos de curvas que aparecen. Parece evidente que tratar todos estos aspectos de golpe, y en momentos introductorios, es de poca (o nula) ayuda para el aprendizaje de los alumnos.

Por otra parte, las discusiones que generan estas actividades, de una gran riqueza conceptual, ayudan al alumnado a explicitar un conjunto muy variado de dificultades, que empieza con la propia dificultad de trazar (o interpretar) un gráfico sin disponer de unos ejes graduados, sigue (en el ejemplo anterior) con las interacciones que provoca el tiempo (a pesar de estar ausente) y llega hasta las discusiones sobre los modelos de funciones subyacentes. Pero, para que este tipo de trabajo sea fructífero, es indispensable que cada una de estas dificultades sea tratada en el momento oportuno y que se proporcionen al alumno ideas e instrumentos para poder efectuar un análisis correcto de lo que sucede, mostrando que este trabajo cualitativo es igual de importante y tan matemático como el cuantitativo.

Consideraciones sobre el contexto

El término contexto, tiene como es sabido, diversas acepciones, y puede referirse tanto a las características de las propuestas de aprendizaje (en este sentido hablamos de situaciones

contextualizadas o no) como a las condiciones en las cuales se realiza el aprendizaje, incluyendo en este apartado aspectos muy diversos: el trabajo dentro y fuera del aula de matemáticas, los aspectos institucionales que condicionan el proceso de enseñanza-aprendizaje, o bien, en un orden distinto, los medios utilizados en la realización de dicho trabajo. Aunque un análisis detallado de la influencia del contexto escapa de las intenciones de esta ponencia, creo que es necesario referirse, de manera puntual, a dos aspectos concretos muy distintos pero especialmente relevantes para el desarrollo del trabajo con funciones: la utilización de actividades contextualizadas y el papel del ordenador.

El papel del contexto en las actividades

Quiero señalar en primer lugar que, desde mi punto de vista, la utilización de situaciones contextualizadas debería obedecer a una cuestión de finalidades más que a una estrategia para facilitar el aprendizaje. Las investigaciones en este sentido son en ocasiones contradictorias (Leinhardt, 1990) y, en todo caso, muestran que no es posible concluir que el uso de actividades contextualizadas ayude de manera significativa a la formación del concepto de función. Ello no significa, en absoluto, que una parte muy importante del trabajo con funciones en la ESO, y también en el bachillerato, no deba realizarse a través de actividades y problemas que parten de situaciones reales externas a las matemáticas.

Entiendo que la introducción de situaciones contextualizadas y el trabajo con variables concretas debe hacerse por diversos motivos, entre los que destacaría los siguientes:

- La importancia de las matemáticas como instrumento de análisis de la realidad, a través de un proceso de modelización, en el que se parte de una situación concreta para pasar a un modelo matemático adecuado, en el cual se trabaja, y luego se vuelve a la situación inicial para su resolución o interpretación.
- La necesidad de dotar a los alumnos de la enseñanza obligatoria de unos instrumentos que les permitan interpretar y criticar informaciones del mundo que les rodea, así como construir sus propios resultados y poder comunicarlos, utilizando los distintos lenguajes del campo de las funciones.
- La propia génesis del concepto de función ligada a la generalización de las leyes que expresan la relación de dependencia entre diversas variables en los distintos campos de la ciencia. En este sentido me parece ilustrativo el ejemplo dado en Aleksandrov (1973), a propósito de la introducción al concepto de función, donde, tras citar diversas leyes del campo de la física ($e = (1/2)gt^2$, $E_c = (1/2)mv^2$, $Q = (1/2)RI^2$) y de las propias matemáticas ($A = (1/2)x^2tga$), plantea el interés del estudio de $y = (1/2)kx^2$, o más en general de la función $y = ax^2$.

No obstante, el proceso que supone este trabajo con situaciones concretas, y el establecimiento necesario de relaciones entre dichas situaciones y los modelos matemáticos correspondientes (en nuestro caso las funciones elementales), presenta numerosos obstáculos que van mucho más allá de dificultades técnicas (que también hay que superar) y que se adentran en el campo de la interpretación conceptual. Aquellos profesores que utilizan situaciones contextualizadas de forma habitual en clase conocen bien los problemas que generan debido, entre otras cosas, a las características específicas de cada una de estas situaciones y a las implicaciones del alumnado con ellas.

A modo de ejemplo, podríamos citar las complejas y ricas discusiones que se generan a propósito de las gráficas más adecuadas para representar una situación concreta, muchas

veces debido a la discretización determinada por el contexto de las variables implicadas. Este problema se plantea por las características de dichas variables, mientras que al tratar situaciones estrictamente matemáticas es mucho menos relevante y en el caso de funciones elementales es prácticamente inexistente. Entiendo que en estos casos es fundamental el papel del profesor para diferenciar el trabajo que se realiza en el marco de la situación y aquel que se refiere al modelo matemático, algo imprescindible para interpretar o resolver la situación concreta, pero también para poder construir los distintos modelos de funciones y sus propiedades características.

Algunas consideraciones sobre el uso del ordenador

Hasta este momento no me he referido a la importancia del uso del ordenador en este tema, cuando, en realidad, se trata de un instrumento de gran valor y que puede variar mucho las condiciones del contexto. Mi poca experiencia en el campo de la investigación sobre el mismo me han llevado a ello, pero es cierto que en la última década se han realizado experiencias interesantes y que han proliferado programas específicos para el tratamiento de las funciones y su representación gráfica. No obstante, desconozco desarrollos curriculares centrados de manera exclusiva (o muy preferente) en el ordenador. En general, el uso del ordenador se combina con el trabajo tradicional y en este punto parecen existir dificultades significativas para transferir los aprendizajes de un entorno a otro, dadas las enormes diferencias entre ambos.

No obstante, a pesar de que las experiencias son todavía limitadas, es evidente que las posibilidades de cambio de lenguaje que ofrece el ordenador facilitan el aumento de experiencias del alumno, especialmente en relación con el lenguaje gráfico, así como la posibilidad de realizar conjeturas y verificarlas. En el caso de la ESO creo que es imprescindible utilizar programas sencillos y al mismo tiempo versátiles, por lo que considero especialmente interesantes diversas experiencias con hojas de cálculo, entre ellas el reciente trabajo de Segura (2001), en el que se utiliza Excel para desarrollar una unidad didáctica con alumnos de cuarto de ESO, cuyos contenidos se refieren a las funciones lineales y cuadráticas, y donde se combina el trabajo cualitativo y cuantitativo utilizando situaciones contextualizadas. El detallado análisis sobre el trabajo de los alumnos ha permitido detectar tanto aquellos aspectos en los que el ordenador ha posibilitado un avance significativo en los alumnos, como las dificultades derivadas del entorno concreto utilizado.

Reflexiones finales

De las consideraciones precedentes se induce que los cambios introducidos en el tratamiento de las funciones en nuestro país en los diez últimos años han sido múltiples, tanto en el enfoque general del tema como en el desarrollo particular del mismo y que muchos de estos cambios están directamente relacionados con las investigaciones en didáctica de las funciones realizadas en los últimos veinte años, tanto en nuestro país como en otros.

No obstante, creo que es necesario avanzar en la línea expuesta por De Lange (2001), en el sentido de realizar investigaciones ligadas al desarrollo curricular. También Leinhardt (1990) considera que hace falta todavía mucho trabajo empírico y que deberán transcurrir algunos años para que muchos de los cambios propuestos por los resultados de la investigación, e incluso reflejados en los currículos oficiales lleguen de manera generalizada a las aulas. En

este sentido queda aún mucho camino para recorrer, para lograr que la mayoría del alumnado adquiriera las competencias básicas relacionadas con el tema de las funciones. El desarrollo de dichas competencias, que deberían formar parte de la formación de todos los ciudadanos, como, por ejemplo, la interpretación y la construcción de gráficas elementales deben todavía superar las resistencias de muchos que las consideran como algo poco relevante o, en todo caso, alejado de los principales objetivos de la enseñanza de las matemáticas.

Mientras tanto, como señalaba Abrantes (2001) en su conferencia en el PME 25, celebrado recientemente en Utrech, seguiremos constatando lo mal que se siguen construyendo muchas gráficas, no precisamente por parte de nuestros alumnos sino de distinguidos profesionales, como son, sin duda, los responsables de una de las principales asociaciones de matemáticos del mundo, que al presentar la evolución del número de sus asociados, trazaron una gráfica que, por un lado presenta errores de graduación en uno de los ejes, y por otro, su realización es capciosa ya que muestra visualmente unos incrementos relativos que no responden a la realidad.

Bibliografía

- ABRANTES (2001): «Revisiting the goals and the nature of mathematics for all in the context of a national curriculum», *Proceedings of PME 25*, vol 1, 25-40. Utrech (Holanda).
- ALEKSANDROV y otros (1973): *La matemática: Su contenido, métodos y significado*, Alianza Universidad 68, vol. 1, Alianza, Madrid.
- AZCÁRATE, C. y J. DEULOFEU (1990): *Funciones y Gráficas*, Síntesis, Madrid.
- AZCÁRATE, C. y J. DEULOFEU (1998): *Guías Praxis para el profesorado. Matemáticas. ESO*, Cisspraxis, Barcelona.
- AZCÁRATE, C. y J. DEULOFEU (2000): «Investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje del análisis en España», en R. Cantoral, (coord.): *El futuro del Cálculo Infinitesimal*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 355-361.
- BELL, A. y C. JANVIER (1981): «The interpretation of graphs representing situations.», *For the Learning of Mathematics*, 2, 1.
- CALVO, C. (2001): *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral*, Tesis de doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona.
- DE LANGE, J. (2001): «The P in PME: progress and problems in mathematics education», *Proceedings of PME 25*, vol 1, 2-4. Utrech (Holanda)
- DEULOFEU, J. (1991): «El lenguaje de las gráficas cartesianas y su interpretación en la representación de situaciones discretas», *Comunicación, Lenguaje y Educación*, n.º 11-12, 77-86.
- DEULOFEU, J. (1993): *Els grafics cartesianes de funcions: Un estudi de les concepcions del alumnes centrat en el significat del gràfic*, Tesis de doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona
- DEULOFEU, J. (1995): «Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre distintas gráficas de funciones», *UNO*, n.º 4, 6-16.
- DREYFUS, T. (1990): «Advanced Mathematical Thinking», en P. Neshery J. Kilpatrick (ed.): *Mathematics and Cognition*, Cambridge University Pres, Cambridge, 113-133.
- DREYFUS, T. (1991): «Advanced Mathematical Thinking Processes», en D. Tall (ed.): *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, 25-41.
- FONT, V. (1999): *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*, Tesis de doctorado, Universitat de Barcelona.

- JANVIER, C. (1978): *The Interpretation of Complex Cartesian Graphs Representing Situations*, Ph D Thesis, University of Nottingham.
- JANVIER, C. (1981): «Les représentations graphiques», *Actas I JAEM*, Barcelona.
- JANVIER, C. (ed.) (1987): *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, LEA Publ, Londres.
- LACASTA, E. (1995): *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques: illusions et contrôles*, Tesis de doctorado, Universidad de Burdeos I.
- LEINHARDT, G., O. ZASLAVSKY y M. STEIN (1990): «Functions, Graphs and Graphing: Tasks, Learning and Teaching», *Review of Educational Research*, vol. 60, n. 1, 1-64.
- MEC (1989): *Diseño Curricular Base. Área de Matemáticas*, MEC, Madrid.
- RUIZ HIGUERAS, L. (1993): *Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- SEGURA, M. J. (2001): *L'estudi de les funcions utilitzant el full de càlcul com a eina de treball: Anàlisi d'un procés constructiu basat en la manipulació y la visualització*, Tesis de doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona.
- SOUTH NOTTS PROJECT (1983): *Functions and Graphs*, Shell Centre, Nottingham.
- SWAN, M. (1982): *The language of graphs*, Shell Centre, Nottingham. [Versión castellana: SHELL CENTRE FOR MATHEMATICS EDUCATION (1990): *El lenguaje de funciones y gráficas*, MEC/Universidad del País Vasco, Bilbao].

Notas

- * Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.