Aprender a demostrar: los juegos de estrategia*

José María Gairín**

Parece deseable que los alumnos finalicen la Educación Secundaria con un mejor conocimiento de la matemática como disciplina científica, de la matemática como resultado del trabajo de unos profesionales que disponen de unas herramientas, un modo de pensar, un método artesanal de trabajo y una manera de presentar los resultados que son peculiares y característicos de la producción matemática.

En esta ponencia se presentan algunos juegos de estrategia que constituyen un recurso adecuado para iniciar a estos estudiantes en tareas de demostración en el ámbito de la matemática discreta. La idea básica es que los estudiantes aprendan a demostrar haciendo demostraciones, y no observando cómo las hace el profesor.

Estos juegos permiten a los alumnos realizar tareas de distinta dificultad, tanto por la formulación del enunciado como por las técnicas necesarias: resolver un caso particular, formular hipótesis, y demostrar o rechazar las hipótesis. De este modo, cuando los alumnos afrontan la tarea de la demostración tienen que realizar un estudio del contenido de las hipótesis que han encontrado, pero este estudio resulta más sencillo haciendo un análisis cualitativo de los casos particulares trabajados previamente.

Introducción

La práctica escolar sobre la demostración en matemáticas suele limitarse a la presentación formal por parte del profesor, y a instruir a los alumnos para repetir las demostraciones presentadas por los matemáticos; pero no es práctica usual educar para que los alumnos construyan demostraciones.

Entendemos que educar en la demostración matemática significa simular el trabajo que hacen los matemáticos; y ello conlleva situar a la demostración en el final de un recorrido que comienza por la resolución de problemas particulares, sigue por la formulación de hipótesis y culmina con la confirmación o rechazo de tales hipótesis (Gairín, 2001). Por tanto, la demostración hay que situarla al final de este recorrido, y el trabajo requiere desentrañar el significado de la hipótesis formulada, buscar argumentos lógicos que garanticen la verdad o falsedad de la hipótesis, y utilizar herramientas de trabajo como los conceptos y teoremas matemáticos, las técnicas de cálculo, o las leyes de la lógica.

Nuestro propósito es el de utilizar juegos de estrategia para educar a los alumnos en la demostración matemática, fundamentalmente en el ámbito de la matemática discreta. Este proceso educativo toma como premisa que la formalización y estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo no sea el punto de partida, sino más bien un punto de llegada (MEC, 1989). Y en este sentido, entendemos que las exigencias de la demostración matemática no puede adquirirlas el alumno a través de unos pocos ejemplos que le muestra el profesor, pues tales presentaciones son el resultado de un largo camino que comienza por la resolución de casos particulares, y continúa por la formulación de resultados generales; de este modo, al comenzar el trabajo de demostración ya se dispone de una amplia experiencia sobre el problema.

Entender las demostraciones

No es fácil transmitir a un alumno de Educación Secundaria el significado de la demostración matemática, por cuanto es un concepto complejo que admite distintas interpretaciones. Pero sí que es habitual que en el proceso educativo aparezcan demostraciones matemáticas, unas que hace el profesor y otras que se proponen al alumno; de esta práctica educativa, ¿qué ideas transmitimos?, ¿cómo las pueden interpretar los alumnos?

Para responder a estas cuestiones hemos hecho un ejercicio de imaginación para tratar de enlazar la práctica docente y la percepción de los alumnos. Para ello, hemos propuesto una demostración de los alumnos y analizamos sus posibles respuestas. En concreto, se les propone:

> Demostrar que la suma de los n primeros números naturales es $(n+1)n/2$

Incluimos posibles respuestas de los alumnos, la valoración del trabajo por parte del profesor, y las posibles percepciones de los alumnos:

Respuesta del alumno A:

> Llamando S a la suma de dichos números, y teniendo en cuanta la propiedad conmutativa de la suma se tienen las dos igualdades siguientes:
>
> $$S = 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)\ n$$
>
> $$S = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1$$
>
> Por tratarse de una progresión aritmética se cumple que la suma de los términos equidistantes de los extremos es constante. Por tanto, al sumar los dos términos de las igualdades anteriores, y teniendo en cuenta que hay n sumandos en cada igualdad, se tendrá $2S = (n+1) \times n$. Y despejando: $S = (n+1)n/2$.

Profesor: Está muy bien; esta es la respuesta que esperaba.
Alumno: Demostrar es repetir lo que nos cuentan en clase y tal y como nos lo cuenta, salvo que haya que introducir ligeras variaciones.

Respuesta del alumno B:

> Se trata de un caso particular de la suma de los términos de una progresión aritmética de primer término 1, de último término n, que tiene n términos y que la diferencia es 1. Por tanto: $S = (n+1)n/2$.

Profesor: No es que esté mal, pero yo espero otro tipo de demostración.
Alumno: Demostrar es aplicar un resultado general a un caso particular.

Respuesta del alumno C:

> *Lo demostraré por el método de inducción*
>
> - Si solamente hay un término, $S = (1+1)1/2$. Se cumple la igualdad
> - Supongamos que es cierto para $n = k$; es decir, se cumple $S = (k+1)k/2$.

• Para $n = k+1$, se tiene

$$S = [1+2+3+...+k]+(k+1) = (k+1)k/2 + (k+1)$$

Y sacando factor común $(k+1)$,

$$S = (k+1)(k/2+1) = (k+1)(k+2)/2 = (k+1)[(k+1)+1]/2$$

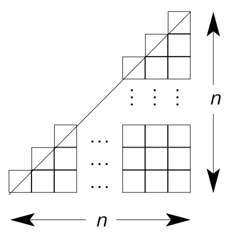
Por tanto, podemos enunciar que para cualquier valor de n, $S = (n+1)n/2$.

Profesor: Esto no lo hemos hecho en clase; aunque emplea un método de ámbito local el trabajo es correcto.

Alumno: Demostrar es aplicar el método de inducción que funciona siempre.

Respuesta del alumno D:

Vamos a utilizar un cuadrado de área la unidad. Entonces, lo que se pide es calcular el área de la siguiente figura:



Si trazo el segmento s el cálculo del area que busco se obtiene de este modo

• El área del triángulo es $(n\text{x}n)/2$

• Para calcular el área total falta por contabilizar n triángulos de área 1/2 de la unidad; en total tendrán de área $n \times 1/2$

• Luego, el área buscada es: $S = (n\text{x}n)/2 + n/2 = n(n+1)/2$

Por tanto, podemos enunciar que la suma de los n primeros números naturales es: $S = (n+1)n/2$.

Profesor: Lo ha sacado de algún libro y le ha convencido más que lo hecho en clase. No lo tiene mal, pero no utiliza ideas sobre las progresiones aritméticas.

Alumno: Demostrar es repetir alguna idea feliz que se le haya ocurrido a algún matemático

A modo de conclusión

La idea que transmite el profesor a sus alumnos es que la demostración matemática es un lugar cerrado; es la presentación formal de una secuencia de argumentos que la ortodoxia manda hacer de una manera determinada. Básicamente, en la evaluación de los alumnos se considera su capacidad de *entender* las demostraciones previamente explicadas por el profesor.

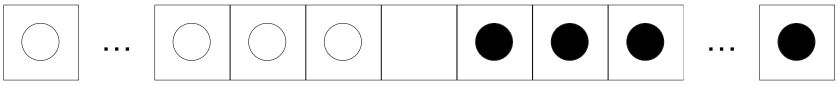
El alumno también acepta su papel de reproductor de las presentaciones hechas por el profesor, en las que figuran ideas ingeniosas; aunque también hay alumnos que entienden que demostrar es aplicar un determinado método. En todo caso, su creatividad ha sido anulada, su posibilidad de afrontar tareas de demostración por sí mismo no existe; la práctica docente no les sirve como preparación para entender y aplicar las herramientas y métodos propios de la matemática; su experiencia no le sirve para hacer demostraciones.

Hacer demostraciones

Un modo de diseñar actividades para la formación de los alumnos en las tareas de hacer demostraciones matemáticas podemos encontrarla en nuestra propia experiencia, en la observación del método de trabajo y de las herramientas con las que abordamos estas tareas. Para reflexionar sobre esta práctica de experto en la demostración matemática sugerimos hacer la siguiente demostración:

• *Juego: SOL Y LUNA*

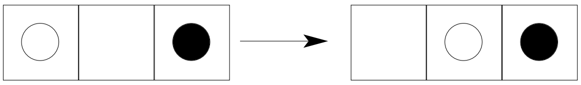
Es un juego solitario que se practica sobre un tablero de $2n+1$ casillas sobre el que hay colocadas n fichas blancas y n negras en la disposición que indica el gráfico.



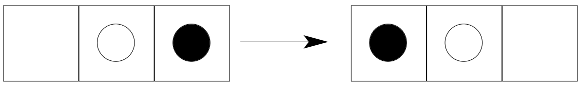
El objetivo es intercambiar la posición de las fichas; es decir, colocar las n fichas blancas a la derecha y las n fichas negras a la izquierda, dejando un cuadro libre entre ambas.

Las fichas pueden moverse del siguiente modo:

a) Cada ficha puede desplazarse al cuadro adyacente si está vacío



b) Una ficha de un color puede saltar por encima de una ficha de otro color, si hay un cuadro libre



> Demostrar que el menor número de movimientos necesarios para intercambiar la posición de n fichas blancas y n fichas negras es $M_n = n(n+2)$

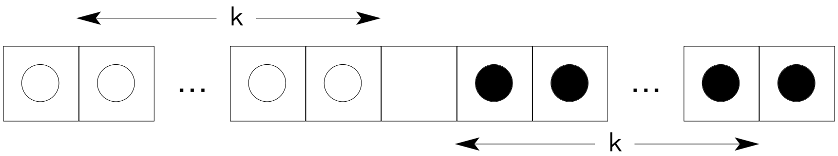
Una posible secuencia de trabajo podría ser la siguiente:

a. Utilizar algún método de demostración

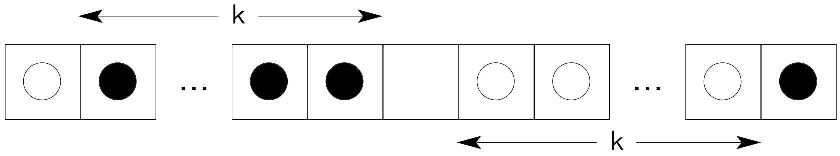
a.1. Utilizar el método de inducción completa

- Para $n = 1$ resulta $M_1 = 1(1+2) = 3$, resultado que puede comprobarse fácilmente.
- Se admite que para $n = k$, $M_k = k(k+2)$
- Hay que probar que para $n = k+1$ se cumple $M_{k+1} = (k+1)[(k+1)+2] = (k+1)(k+3)$

Para alcanzar este resultado debemos partir de la situación inicial



Teniendo en cuenta la hipótesis de inducción se alcanza la siguiente posición



Para conseguir la posición final deben emplearse $(k+1)(k+3) - k(k+2) = 2k+3$ movimientos. Y esto se intuye dificultoso pues para mover la ficha negra de la derecha hay que hacer retroceder a k fichas blancas; situación que no ayuda a minimizar el número de movimientos.

a.2. Utilizar otros métodos de demostración

Puesto que el método de inducción completa no resulta adecuado, puede surgir la idea de utilizar el método de reducción al absurdo; pero rápidamente se rechaza por su inadecuación.

Puede pensarse en el método de reconstruir la demostración partiendo de la solución, empezar por el final; pero también se muestra inadecuado.

b. Construir una demostración

Como no se encuentra un método de trabajo, se afronta la tarea de hacer la demostración analizando las condiciones que aparecen en la hipótesis:

De la lectura de los datos se tiene que n indica el número de fichas de cada color, y que M_n indica el número de movimientos necesarios. Ahora bien, puesto que se tiene la igualdad $M_n = n(n+2)$ hay que preguntarse sobre el sentido de este producto, lo que lleva a cuestionar el sentido de cada uno de los factores: está claro que los dos factores no pueden referirse a número de fichas, pues su producto no daría número de movimientos; por tanto, dado que aparece un producto de números naturales cabe pensar que uno de los factores hace referencia a número de movimientos, mientras que el otro factor debe indicar el número de veces que se repiten dichos movimientos.

Para investigar qué ocurre con cada uno de esos factores puede hacerse un estudio sobre un caso particular; por ejemplo veamos qué ocurre si hay 3 fichas de cada color, cómo se consigue el objetivo con ese número de fichas.

Para ello, utilizaremos un sistema de símbolos que nos permitan analizar el desarrollo del juego en este caso particular: B indica una ficha blanca, N una ficha negra y — la casilla vacía.

Puesto que 15 = 3 x 5, cabe hacerse una primera pregunta:

b.1. ¿qué ocurre cada 3 movimientos?

Para responder a esta cuestión hay que resolver el juego y escribir la solución detallada. Una posible representación puede hacerse de este modo:

Mov. 1:	B	B	B	N	—	N	N
Mov. 2:	B	B	—	N	B	N	N
Mov. 3:	B	—	B	N	B	N	N
Mov. 4:	B	N	B	—	B	N	N
Mov. 5:	B	N	B	N	B	—	N
Mov. 6:	B	N	B	N	B	N	—
Mov. 7:	B	N	B	N	—	N	B
Mov. 8:	B	N	—	N	B	N	B
Mov. 9:	—	N	B	N	B	N	B
Mov. 10:	N	—	B	N	B	N	B
Mov. 11:	N	N	B	—	B	N	B
Mov. 12:	N	N	B	N	B	—	B
Mov. 13:	N	N	B	N	—	B	B
Mov. 14:	N	N	—	N	B	B	B
Mov. 15:	N	N	N	—	B	B	B

Ahora comienza un trabajo de tipo intuitivo de ir buscando regularidades en los bloques de 3 movimientos y observar si se mantienen en los restantes bloques. Algunas respuestas pueden indicar que en cada uno de los bloques hay columnas que tienen el mismo valor, que hay fichas que no se cambian de casilla; también puede observarse que la posición vacía «avanza» en la misma dirección en cada uno de los bloques, etc.

Ahora bien, sea cual sea la regularidad que se observe hay que buscar razones lógicas que justifiquen tal comportamiento; además, hay que buscar razones lógicas que justifiquen que tal regularidad se ha de presentar exactamente 5 veces para lograr completar el juego. Finalmente, si se han encontrado esos argumentos lógicos hay que trasladarlos al caso en que haya *n* fichas de cada color.

b.2. Si no se consiguen encontrar razones que justifiquen lo que ocurre cada 3 movimientos, hay que preguntarse: ¿qué ocurre cada 5 movimientos?

Comenzamos por mostrar el desarrollo del juego separando los movimientos en bloques de 5 (ver página siguiente).

De nuevo aparecen algunas intuiciones como que hay bloques de movimientos en los que intervienen todas las fichas salvo las de los extremos, que hay fichas que no se mueven en todo el bloque, que hay fichas de un determinado color en alguno de los extremos, etc. En cualquiera de los supuestos hay que justificar por qué ocurre así, y por qué esa regularidad se produce 3 veces; y luego hay que observar si tales argumentos se pueden trasladar al caso de *n* fichas de cada color.

Mov. 1:	B	B	B	N	—	N	N
Mov. 2:	B	B	—	N	B	N	N
Mov. 3:	B	—	B	N	B	N	N
Mov. 4:	B	N	B	—	B	N	N
Mov. 5:	B	N	B	N	B	—	N
Mov. 6:	B	N	B	N	B	N	—
Mov. 7:	B	N	B	N	—	N	B
Mov. 8:	B	N	—	N	B	N	B
Mov. 9:	—	N	B	N	B	N	B
Mov. 10:	N	—	B	N	B	N	B
Mov. 11:	N	N	B	—	B	N	B
Mov. 12:	N	N	B	N	B	—	B
Mov. 13:	N	N	B	N	—	B	B
Mov. 14:	N	N	—	N	B	B	B
Mov. 15:	N	N	N	—	B	B	B

b.3. Buscar regularidades

Puede ocurrir que se observen algunos comportamientos pero que no sean suficientes para completar la demostración. Asi, por ejemplo, se intuye que hay columnas estables mientras se realizan un número fijo de movimientos; pero no se encuentran razones para que tal hecho ocurra, o bien para que ocurra un determinado número de veces.

Surge así la idea de buscar regularidades que sean aplicables a casos concretos con cualquier número de fichas de cada color. Puede ocurrir, en consecuencia, que se marginen los objetivos propuestos y se aborde la tarea de buscar comportamientos regulares, partiendo de alguna de las observaciones que se han hecho con anterioridad. Así, puede observarse que las posiciones de las fichas guardan una simetría, o que el color de las fichas que se mueven presenta ciertas regularidades, etc.

Vamos a estudiar el color de las fichas que se mueven. En este supuesto ya no se limita el estudio al caso de 3 fichas de cada color; ahora se pretende observar la evolución de los movimientos en situaciones concretas. De este modo, se obtienen los siguientes resultados del desarrollo de varios casos particulares, que se inician con un movimiento de una ficha negra, N, en los que se indica la secuencia de fichas que se mueven (*m*N indica que se mueven *m* fichas negras de forma consecutiva):

N.º fichas de cada color	*Color de las fichas que se mueven*
2	1N, 2B, 2N, 2B, 1N
3	1N, 2B, 3N, 3B, 3N, 2B, 1N
4	1N, 2B, 3N, 4B, 4N, 4B, 3N, 2B, 1N
5	1N, 2B, 3N, 4B, 5N, 5B, 5N, 4B, 3N, 2B, 1N

De esta tabla parece intuirse una secuencia de movimientos que se puede generalizar al caso de n fichas de cada color (supuesto que al comenzar se desplaza una ficha blanca bastaría intercambiar las letras B y N):

- Si n es impar: 1N, 2B, 3N, ... (n–1)B, nN, nB, nN, (n–1)B, ..., 3N, 2B, 1N
- Si n es par: 1N, 2B, 3N, ... (n–1)N, nB, nN, nB, (n–1)N, ..., 3N, 2B, 1N

La suma de estos movimientos nos dará el total de los necesarios para intercambiar las posiciones de n fichas negras y n fichas blancas. Por tratarse de dos progresiones aritméticas iguales, más n movimientos situados en el centro de la secuencia de movimientos:

$$S = 2\left(\frac{n+1}{2}n\right) + n = (n+1)n + n = n(n+2)$$

Ahora bien, cuando se llegan a formular estas conclusiones hay una experiencia previa en la resolución de casos particulares del juego que conviene resaltar:

i. Salvo en posiciones iniciales o finales no hay que poner dos fichas consecutivas del mismo color, pues se perdería un movimiento para separar ambas fichas.
ii. Después de desplazar una ficha hay que hacer que se produzcan todos los saltos posibles.
iii. Después de un salto hay que hacer que salte una ficha del mismo color o, caso de no ser posible, hay que desplazar una ficha del mismo color.

En estas condiciones, se justifica que:

- El primer movimiento es obligado, mover la ficha N adyacente a la casilla vacía; queda una ficha negra a la izquierda de una ficha blanca. Total movimientos: 1N.
- Teniendo en cuenta el punto iii, hay un salto de una ficha blanca seguido de un desplazamiento de otra ficha blanca. Así quedan 2 fichas blancas situadas a la izquierda de 2 fichas negras. Total movimientos: 2B.
- La situación permite hacer 2 saltos de fichas negras seguidos de un deplazamiento de 1 ficha negra. Total movimientos: 3N.
- Así seguirán produciéndose, alternativamente, un número creciente de macromovimientos de fichas blancas y negras, aumentando cada vez una unidad el número de movimientos, llegándo a las posiciones siguientes (0 casilla vacía):
  · si n es par: B B N B N ... B N 0 N
  · si n es impar: B B N B N ... B N 0 N
- Atendiendo al caso en que n sea par (se procedería de forma similar en caso de ser impar), se observa que hay n–1 fichas blancas que tienen una ficha negra a su izquierda. De acuerdo con el punto iii. se producirán n–1 saltos de fichas blancas, más un desplazamiento de 1 ficha blanca. Total movimientos: ***n*B**.
  Además, la disposición de las fichas será: 0 B N B N ... B N B N.
- Puesto que hay n fichas negras que tienen una ficha blanca a su izquierda se producirán tantos saltos como fichas negras hay. Total movimientos: ***n*N**.
  Las fichas quedan en la disposición: N B N B ... N B N B 0.
- Se observa que hay n–1 fichas blancas que tienen una ficha negra a su derecha. Por tanto, se producirá 1 desplazamiento de una ficha blanca, seguido de n–1 movimientos de fichas blancas. Total movimientos: ***n*B**.

Quedan las fichas en la disposición: N 0 N B N ... N B N B B

- Quedan n–2 fichas negras que tienen una ficha blanca a su izquierda, pues una ficha negra ya ocupa la posición final. Hay que hacer 1 desplazamiento de una ficha negra, seguido de n–2 saltos de fichas negras. Total movimientos: **(n–1)N**.
- Así seguirán, de forma alternativa, macromovimientos de fichas blancas y negras, disminuyendo cada vez una unidad el número de movimientos, hasta llegar al último movimiento de una ficha negra.

b.4. La actuación del experto

Tras varios ensayos, fracasos, caminos cerrados, etc., que han ido surgiendo en este proceso que culmina en la demostración, se pueden sintetizar las tareas que se han realizado (Hernán, 1982):

– descubrir la regularidad de una situación
– sistematización de los ejemplos
– conjeturar
– crítica de la conjetura
– nueva conjetura
– demostración de la conjetura
– crítica de la demostración

Por tanto, la demostración exige una técnicas y unas herramientas complejas, cuyo conocimiento y manejo no son fruto de la casualidad o de la imaginación. Sería pretencioso pensar que un alumno llegara a manejar estas técnicas con la observación de las demostraciones del profesor puesto que éstas se presentan ya terminadas; es necesario que el alumno las aprenda y utilice en un proceso de creación propia en el que intervengan la resolución de casos particulares, la búsqueda de regularidades, la formulación de resultados generales y la utilización de argumentos para justificar las razones de tal generalización.

b.5. La demostración formal

Aun cuando se ha llegado a demostrar el resultado pedido, como expertos en la disciplina matemática somos conscientes de que tal demostración puede y debe mejorarse para atender a la mejor presentación del resultado.

Sabemos que, dependiendo de las observaciones de las personas, pueden aparecer distintas demostraciones sobre el número mínimo de movimientos que hacen falta para intercambiar la posición de n fichas blancas y n fichas negras. Cada una de estas demostraciones utilizará los argumentos que convienen al comportamiento que se ha observado, y serán igualmente válidas. Ahora bien, seguramente la demostración más formal, la más cercana a la ortodoxia, se haría en los términos siguientes (Corbalán y Gairín, 1988):

1. Para llegar a la posición final cada ficha debe recorrer $n+1$ casillas. En total se deben de recorrer $2n \times (n+1) = 2n^2+2n$ casillas.
2. Cada salto hace avanzar a las fichas 2 casillas, mientras que cada desplazamiento solamente les hace avanzar 1 casilla. Por tanto, interesa que se produzca el mayor número de saltos posibles.
3. El mayor número de saltos tiene que ser $n \times n = n^2$, puesto que, como máximo, cada ficha de un color (por ejemplos las blancas) puede saltar sobre todas las fichas del otro color (sobre todas las fichas negras).

4. Realizados los $n \times n$ saltos las fichas habrán recorrido un total de $2n^2$ casillas.
5. Faltan por recorrer $(2n^2+2n)-2n^2 = 2n$ casillas. Éstas solamente se pueden recorrer mediante desplazamientos; por tanto, como en un desplazamiento se recorre 1 casilla, el número de desplazamientos será $2n$.
6. De los resultados de 3 y 5 se obtiene que el número total de movmientos será $n^2+2n = n(n+2)$.
7. Este número de movimientos es el mínimo puesto que se han contabilizado todos los saltos que pueden dar las fichas.
8. Con las argumentaciones anteriores se ha logrado demostrar la condición necesaria; falta por alcanzar la condición suficiente, es decir, falta por demostrar que con estos movimientos se consigue intercambiar la posición de las n fichas blancas y las n fichas negras:
   Si una ficha de un color (blanca, por ejemplo) salta sobre todas las del otro color (todas las negras) se encontrará a la derecha de todas las negras. Por tanto, después de que salten todas las fichas blancas sobre todas las negras, todas las fichas blancas se encuentra a la derecha de las fichas negras.
   Además, con el número de movimientos indicados se recorrerán todas las casillas necesarias para intercambiar la posición de las fichas negras y blancas; y como las fichas blancas están situadas a la derecha de todas las negras se conseguirá que las fichas blancas y negras ocupen la disposición final.

A buen seguro que una demostración de este tipo será la que triunfe, la que se considere que responde mejor a la forma en que se presentan los resultados matemáticos. Pero desde una perspectiva docente resulta que es la más artificial, pues en cualquier caso particular que se analice se observa que no es cierto que todas las fichas de un color saltan sobre las fichas del otro color, antes bien se observa que unas veces saltan las fichas blancas sobre las negras y que otras veces son las fichas negras las que saltan sobre las blancas.

Si ésta es la demostración que se presenta a los alumnos, éstos se confirmarán en sus percepciones sobre la demostración como resultado de una idea feliz, y ello reafirmará su posición de que demostrar es reproducir las ideas de otro. La práctica docente llevará a presentar unas matemáticas dichas frente a unas matemáticas hechas (Gairín, 1996), a formar alumnos capacitados para entender demostraciones, pero no para hacer demostraciones.

El juego como recurso

La idea principal que sustenta este trabajo es la de presentar los juegos de estrategia como medio adecuado para educar a los alumnos en la demostración matemática. En este sentido, proponemos la utilización de dos tipos de juegos de estrategia, que presentan diferencias en cuanto a su desarrollo y a su análisis:

- Juegos solitarios, en los que un solo jugador trata de alcanzar el objetivo. Para su análisis hay que considerar que todas las jugadas las realiza el mismo jugador quien decide, en todo momento, cuál es la que más le conviene.
- Los juegos bipersonales contemplan el enfrentamiento de dos personas que, siguiendo las reglas, intentan derrotar a su oponente. El estudio de un juego de este tipo tiene por objetivo encontrar una estrategia ganadora, un conjunto de jugadas que

necesita hacer un jugador para lograr la victoria, con independencia de lo que haga su oponente. Por tanto, este estudio exige que cada jugador piense tanto en la jugada que va a realizar como en las posibles respuestas que haga su contrincante

Desde la posición del estudiante hay razones importantes que justifican la utilización de este recurso:

Facilitan la aceptación de la tarea

Para los estudiantes el conocimiento matemático ha existido siempre y es un producto terminado; es más, los estudiantes piensan que tanto en los hechos como en los procedimientos matemáticos no hay lugar para los juicios personales porque en matemáticas no hay más alternativa que la certeza o la falsedad (Borasi, 1990). Y desde estas apreciaciones resulta complicado hacer propuestas a los estudiantes para que construyan demostraciones de resultados matemáticos.

Los juegos tienen la consideración de actividades no identificadas con resultados matemáticos, en tanto que actividades en las que cualquier error es disculpable porque no es el terreno de las matemáticas. Ofrecer a los estudiantes la posibilidad de actuar sin inhibiciones, de trabajar en un campo en el que no conocen resultados matemáticos, facilita la instrucción; además, el estudiante se encuentra más motivado ante un juego porque sabe que aplicando las reglas y realizando jugadas puede acercarse a la solución.

Los juegos son problemas diferenciados

Un juego es un problema en tanto en cuanto se desconoce la solución del mismo, se desconoce la estrategia ganadora o la forma de alcanzar el objetivo. Sin embargo, los juegos tienen un lenguaje propio y un esquema estándar que los convierte en problemas de características diferenciadas.

Los juegos permiten informarse rápidamente de sus elementos esenciales –condiciones iniciales, reglas y objetivos–; en los problemas no siempre resulta sencillo controlar los datos del problema ni precisar el objetivo perseguido. Además, la información que se necesita para el juego está en el enunciado, raramente se precisan de otros supuestos externos, situación que no se produce siempre en los problemas.

El propio juego ya lleva incorporado un modelo sobre el que el resolutor puede actuar de forma inmediata. Sin embargo, la necesidad de controlar los movimientos realizados, la necesidad de comprobar que se aplican correctamente las reglas y la necesidad de garantizar la respuesta adecuada exigen que la resolución del juego se refleje de forma escrita, es decir, que se utilice un código de representación de la realidad que se observa sobre el tablero.

Las comprobaciones suelen ser más sencillas en los juegos puesto que el modelo físico está previamente determinado. Sin embargo, en los problemas esta comprobación dependerá del razonamiento utilizado o del modelo de simulación empleado.

Facilitan el aprendizaje

Es cierto que las argumentaciones matemáticas demandan un nivel de abstracción elevado, y también es cierto que las argumentaciones lógicas no son inmediatas ni fácilmente formulables. Ahora bien, estas exigencias resultan menos complejas al situarlas en el contexto de los números naturales, pues los alumnos tienen más desarrollado el sentido del número y muestran más precisión en el uso del lenguaje matemático.

Hay muchos juegos de estrategia cuyo análisis se realiza desde el campo de los números naturales, son juegos cuya resolución en casos particulares demanda únicamente técnicas de recuento; también permiten formular conjeturas utilizando relaciones aditivas o multiplicativas de los números naturales; y facilitan la búsqueda de argumentos lógicos o la aplicación de algunos métodos de demostración.

Además, en este terreno numérico el estudiante se encontrará en mejor disposición de utilizar el razonamiento plausible (Polya, 1966), la habilidad necesaria para intuir, para discernir la pertinencia de unas intuiciones frente a otras o para reformular intuiciones anteriores.

Desde la posición del profesor, como responsable de la secuencia instructiva, este tipo de juegos presentan aspectos didácticos de gran interés para la educación matemática:

Los juegos son similares a las matemáticas

La estructura de los juegos facilita la presentación de los aspectos esenciales del trabajo matemático; a través de los mismos los estudiantes tienen oportunidades de conocer *in situ* algunas de las herramientas que son consustanciales al quehacer de los matemáticos:

- El significado que tienen las definiciones o los axiomas son más fácilmente comprensibles en términos de juego: la forma del tablero o el número de fichas no son cuestionables, forman parte de la esencia del juego, son los puntos de partida que no tienen que justificarse, son consustanciales al juego. Son informaciones cuyo conocimiento es imprescindible y sobre las que se construye el juego o la matemática.
- El papel que juegan en matemáticas las reglas, las operaciones, son similares a las reglas de los juegos: pueden cuestionarse su adecuación o su origen, pero hay que aplicarlas en la forma que indica el enunciado. Cualquier variación de las mismas no es admisible pues jugar correcta o incorrectamente son sinónimos de aplicar bien o mal una regla.
- Hacer una jugada no es más que aplicar las reglas del juego a los elementos que lo caracterizan. En la construcción de las matemáticas los axiomas y definiciones constituyen los cimientos en los que se asientan la correcta aplicación de las reglas con las que conseguir nuevas formulaciones, del mismo modo que aparece una nueva situación del juego después de cada jugada.
- No todas las jugadas son igualmente adecuadas en la práctica del juego, del mismo modo que no todas las construcciones o deducciones matemáticas son pertinentes. Es más, la puesta en práctica de estrategias, de planes de resolución, ponen de manifiesto, al igual que ocurre en las matemáticas, que los caminos para alcanzar el objetivo pueden ser tortuosos o inadecuados.

Los juegos originan nuevos juegos

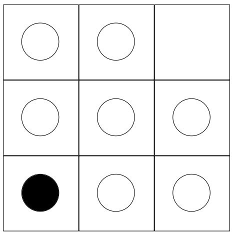
Los enunciados de los juegos de estrategia vienen caracterizados por tres elementos diferenciados: las condiciones iniciales, las reglas y el objetivo a alcanzar. Esta peculiaridad permite crear fácilmente nuevos juegos variando alguno o algunos de los elementos característicos. De este modo aparecen nuevos juegos cuya solución puede ser similar o muy distinta de la del juego inicial.

Esta característica permite organizar distintos niveles de trabajo dentro del aula: partiendo de una tarea común, cada alumno podrá seguir ampliando su trabajo de acuerdo con la celeridad en finalizar las tareas. El profesor, que previamente habrá analizado las posibles variantes, irá ofertando a cada alumno nuevas tareas o modificaciones del juego inicial, lo que supone proponerle nuevos problemas.

A modo de ejemplo, presentamos algunas posibles modificaciones de un juego

• Juego: EL CRUCE

Se juega sobre el tablero que aquí aparece, y en el que hay 7 fichas blancas y una negra, colocadas en las posiciones que se señalan.



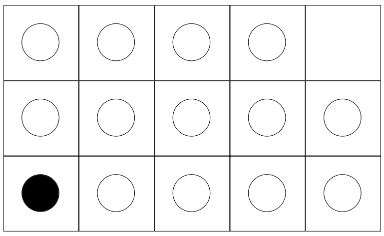
Las reglas son las siguientes:

1. En cada casilla pueda haber una ficha como máximo.
2. Las fichas pueden desplazarse a una casilla contigua, si está vacía.
3. Los desplazamientos han de hacerse siempre en horizontal o vertical, nunca en diagonal.

El objetivo del juego es llevar la ficha negra a la casilla vacía haciendo el menor número de movimientos posible.

a) Modificar las condiciones iniciales

Se trata de aplicar las mismas reglas y conseguir el mismo objetivo partiendo de un tablero de esta forma:



b) Modificar las reglas

Se trata de utilizar el tablero inial para conseguir el mismo objetivo, y reformulando la regla 3 en este sentido.

Que la ficha negra ocupe el centro del tablero y que quede vacía la casilla ocupada por la ficha negra al inicio del juego.

c) Modificar el objetivo

Con el tablero inicial y aplicando las reglas puestas en el juego inicial, se pretende alcanzar el siguiente objetivo:

3.- Los desplazamientos han de hacerse siempre en horizontal, vertical o diagonal.

Educar en la demostración

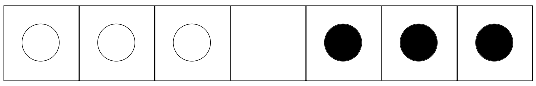
Pensamos que la práctica escolar potencia la presentación de demostraciones formales frente a la construcción de demostraciones matemáticas. Frente a este posicionamiento se ofrece la alternativa de educar a los estudiantes en la demostración matemática; es decir, ofrecer a los estudiantes medios y formas para que puedan afrontar tareas de hacer matemáticas. Lo que se persigue es que los estudiantes finalicen la Educación Secundaria con un mejor conocimiento de la matemática como resultado del trabajo de unos profesionales que utilizan unas herramientas, un modo de argumentar y una forma de presentar los resultados característicos de la disciplina. Se debe potenciar, en suma, la interacción entre la formulación de hipótesis y el razonamiento inductivo, y en la importancia que tiene en esta disciplina de la verificación deductiva de los resultados obtenidos (NCTM, 1989).

En este sentido, al revisar la actuación de expertos de un apartado anterior, observamos que se han realizado una serie de tareas que ya se conocen y se tiene una extensa práctica. Pero los alumnos no son expertos en la demostración matemática, antes bien hay que educarlos para que realicen este tipo de tareas. Resulta pertinente que el edificio se construya desde los cimientos, que se prepare a los alumnos para las tareas de demostración con una secuencia instructiva coherente: que conozcan y utilicen herramientas y técnicas que serán necesarias para la demostración.

Para avanzar en este camino, para elaborar una estrategia de enseñanza de la demostración matemática, consideramos conveniente que la instrucción delimite tres niveles de tareas que se diferencian en los métodos de trabajo y en la dificultad de resolución de las tareas y que, por tanto, debe presentarse de forma secuenciada:

Nivel 1. Resolver un problema particular

Se propone resolver el juego del Sol y Luna en el caso de 3 fichas de cada color



El estudiante se enfrenta a una situación concreta que hay que abordar. El trabajo es el de dar respuesta a la pregunta que se ha planteado y en los términos en que se formuló. El reto, la preocupación, la solución que se busca están sujetos a un entorno concreto y limitado por los datos del problema. El trabajo del resolutor se centra en utilizar técnicas heurísticas que le posibiliten encontrar la solución al problema; además, tiene que idear un sistema con el que representar la solución encontrada y verificar que tal respuesta es correcta.

La tarea del profesor es la de estimular al estudiante para que se implique en la tarea propuesta. Para ello, conviene que el profesor resuelva previamente el problema, pues estará en mejor disposición de ofrecer ayudas eficaces a los estudiantes.

En cualquiera de los ciclos de esta etapa educativa los juegos no son más que casos particulares de problemas; por tanto, deben proponerse también juegos tanto bipersonales como solitarios. La resolución de estos juegos permite hacer algunas reflexiones a los estudiantes:

i) Entender el enunciado es una tarea prioritaria para resolver los juegos, y también los problemas. Para ello, hay que delimitar claramente cuáles son las condiciones iniciales, cuáles son las reglas y cuál es el objetivo a alcanzar. Además, hay que estar vigilantes para no incluir limitaciones o reglas no contempladas en el enunciado.

ii) En la formulación de la respuesta, la solución del juego, hay que detallar los movimientos necesarios. Ello exige definir un sistema de representación para escribir la solución, comprobar que dicha solución se ajusta plenamente a las exigencias del enunciado y verificar que en el desarrollo del juego no se han incumplido las reglas.

iii) La tarea de resolver un juego, de resolver un problema, exige reflexionar sobre la solución que se ha obtenido, exige certificar la bondad de la respuesta que se ofrece.

iv) En los juegos no siempre se encuentra la solución desde la reiteración de pruebas de ensayo y error; del mismo modo que ocurre en la resolución de problemas conviene emplear técnicas que faciliten el trabajo.

Nivel 2. Formular hipótesis

La tarea que se propone a los alumnos es la de encontrar algún procedimiento para conocer el número de movimientos necesarios para intercambiar la posición de cualquier número de fichas. El objetivo perseguido, la solución al problema, es encontrar la relación, si existe, entre una situación inicial genérica y la correspondiente situación final.

Para alcanzar el objetivo hay que sistematizar la resolución de casos particulares con la finalidad de descubrir alguna regularidad. Después hay que formular una conjetura, que ha de someterse a crítica con nuevos ejemplos; así se puede confirmar la conjetura o formular una nueva.

En este trabajo, la búsqueda de los datos, la resolución de casos particulares y la reflexión sobre la hipótesis formulada están entrelazados, actúan de forma paralela: se busca más información para confirmar o rechazar los resultados de un supuesto. La veracidad de la afirmación última, la solución del problema, se dará por correcta si la hipótesis formulada se cumple en todos los casos que se hayan estudiado.

Ahora bien, hay que ser consciente de que, dependiendo de la experiencia y capacidad de los alumnos, pueden surgir distintas conjeturas partiendo de unos mismos datos, como se muestra en los siguientes ejemplos en los que se recogen distintos resultados para diferentes números de fichas, n, de cada color:

n	1	2	3	4
M_v	3	8	15	24
Relación	–	3+5	8+7	15+9

Hipótesis I: $M_v = M_{v-1} + (2n+1)$

n	1	2	3	4
M_v	3	8	15	24
Relación	3	3+5	3+5+7	3+5+7+9

Hipótesis II: $M_v = 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n+1)$

n	1	2	3	4
M_v	3	8	15	24
Relación	1 x 3	2 x 4	3 x 5	4 x 6

Hipótesis III: $M_v = n \times (n+2)$

n	1	2	3	4
M_v	3	8	15	24
Relación	1 + 2	4 + 4	9 + 6	16 + 8

Hipótesis IV: $M_v = n^2 + 2n$

Las actuaciones del profesor difieren sustancialmente de las que desarrollaba en el caso de un problema particular; el tipo de ayudas que ofrecer al alumno presentan otras características: debe clarificar al estudiante cuál es el propósito del trabajo de generalización, tiene que mostrar al estudiante la necesidad de resolver situaciones particulares que le permitan formular enunciados generales, tiene que orientar al estudiante para que haga un trabajo metódico, y tiene que ayudar al alumno a formular la conjetura en lenguaje matemático. Participa en el aprendizaje del estudiante ofreciendo diferentes puntos de acceso a la solución, así como la ayuda necesaria para relacionar distintos tópicos matemáticos (Oliveira y otros, 1997).

La búsqueda de regularidades y la formulación de resultados generales puede afrontarse en cualquiera de los ciclos de la Educación Secundaria. Esta formulación puede hacerse en el lenguaje habitual, aunque el conocimiento del lenguaje algebraico facilitará a los alumnos la formulación de resultados generales en situaciones más complejas.

La capacidad de generalización conviene educarla por cuanto ofrece oportunidades para que los estudiantes reconozcan y construyan patrones y relaciones numéricas que incrementarán su sentido numérico (Hope, 1989; Greeno, 1991). En este sentido pueden resultar útiles las siguientes consideraciones:

i) La búsqueda de los datos exige de un método organizado de resolución de casos particulares; pero resulta indispensable que los datos, los casos particulares, sean fiables.
ii) Conviene que los estudiantes utilicen técnicas apropiadas para la búsqueda sistemática y control de los datos necesarios. Las tablas constituyen herramientas útiles en este proceso, aun cuando la finalidad de dichas tables es la de contener el mínimo número de datos necesarios para establecer las relaciones que se precisan.

iii) En las relaciones entre series de números los alumnos tienden a priorizar las relaciones de tipo aditivo; las relaciones multiplicativas suelen buscarse después de intentos fallidos con relaciones aditivas.
iv) Los estudiantes no formulan de igual manera los resultados generales; es más, conviene enriquecer el sentido numérico de los estudiantes con el conocmiento de los diferentes resultados que han dado sus compañeros a una misma propuesta de generalización.
v) Hay que explicitar a los estudiantes que, en muchos casos, la formulación de un patrón puede descomponerse en la formulación de dos o más patrones que abordan aspectos parciales del patrón general; en este caso, debe garantizarse que la casuística de todos los patrones particulares abarca la totalidad del patrón general.

Nivel 3. Demostrar/rechazar hipótesis

Habitualmente el alumno, una vez descubierta la conjetura, no encuentra necesario hacer una demostración formal puesto que considera que su conjetura ya ha mostrado su eficacia en todos los casos controlados. Convencer a los alumnos de la importancia de la demostración no es tarea fácil, pero resulta eficaz utilizar al juego que Guzman (1984) denomina *La rana saltarina*, a través del cual se pone de manifiesto que las conjeturas resultan ineficaces.

Hay que ser consciente de que la demostración constituye un paso de un orden de dificultad mayor. Esta dificultad aparece desde el momento en el que los datos de que dispone el alumno son la hipótesis formulada y las características observadas en la resolución de casos particulares. Otro aspecto de esta dificultad la constituye la concreción del objetivo final, de la solución del problema, puesto que hay que argumentar que la hipótesis es cierta (o que hay que rechazarla por ser falsa); y para ello no basta con comprobar la eficacia de la hipótesis en todos y cada uno de los casos particulares que puedan presentarse, sino que hay que esgrimir argumentos lógicos que garanticen la validez del resultado.

Las ayudas del profesor presentan características diferenciadas con respecto a los otros niveles: habituar al alumno a explicitar el sentido que tienen los términos en que se formuló la hipótesis, transmitir al alumno el papel que juega la demostración en matemáticas, y desarrollar labores de tutorización sobre la hipótesis particular que cada estudiante quiere demostrar. De este modo, la demostración no se presenta de forma autoritaria ocultando el proceso que llevó al descubrimiento (Lakatos, 1978), sino que los resultados aparecen inmersos en el proceso de su creación.

Obsérvese que en cada una de las hipótesis formuladas anteriormente el tipo de argumento a utilizar será de naturaleza diferente. El profesor deberá tutorizar a cada uno de los alumnos de acuerdo con su peculiar hipótesis, y avanzar con él en la búsqueda de argumentos lógicos que sustenten tal hipótesis, o en la formulación de una nueva hipótesis si la anterior no lleva a la demostración.

Las tareas de demostración son educables, siendo los juegos un recurso adecuado para la instrucción por cuanto permiten elaborar razonamientos lógicos a partir de la experimentación en situaciones particulares. Ahora bien, la demostración exige de un grado de abstracción que no se alcanza en el primer ciclo de edución secundaria; por tanto, será a partir de este ciclo cuando se propongan tareas de demostración pero graduando el nivel de formalización de las mismas.

Algunas consideraciones pueden resultar útiles para afrontar esta tarea educativa:

i) La demostración exige un análisis cualitativo de las condiciones que figuran en la hipótesis: hay que estudiar tanto los elementos intervinientes como las relaciones que se establecen entre ellos.

ii) La utilización de casos particulares posibilita el estudio cualitativo del juego y facilita el paso a argumentaciones de ámbito más general.

iii) Una adecuada selección de juegos como los que figuran en Gairín (2000), permite comenzar el trabajo de demostración en el ámbito de la matemática discreta.

iv) Iniciar a los estudiantes en las tareas de demostración exige del profesor un conocimiento previo de la solución del juego, una posición de animador al aprendizaje, y unas sesiones de aula en las que prime la tutorización.

Bibliografía

BORASI, R. (1990): «The Invisible Hand Operating in Mathematics Instruction: Students´ Conceptions and Expectations», en Cooney, T. J. y Hirsch, C. R. (edit.), *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s (1990 yearbook)*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

CORBALÁN, F. y J. M. GAIRÍN (1988): *Problemas a mí. 3, Juegos matemáticos*, Edinumen, Madrid.

GAIRÍN, J.M. (1996): «Del dicho al hecho...», *Suma*, 21, 41-54.

GAIRÍN, J.M. (2001): «Hacer matemáticas: el juego como recurso», en C. Alsina; M. A. Ortiz; J. M. Gairín; A. Pérez y J. L. Álvarez (2001), *Aspectos didácticos de Matemáticas. 8*, Instituto de Ciencias de la Educación (ICE), Zaragoza., 55-116.

GREENO, J. (1991): «Number sense as situated knowing in a conceptual domain», *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 22, pág. 170-218.

GUZMÁN de, M. (1984): *Cuentos con cuentas*, Labor bolsillo juvenil, Barcelona.

HOPE, J. (1991): «Promoting number sense in school», *Aritmetic Teacher*, vol, 36, 12-16.

HERNÁN, F. (1982): *Estrategias, conjeturas y demostraciones,* Valencia, Institut de Ciencies de l'Educació, Univesitat de Valencia.

KAKATOS, I. (1978): *Pruebas y refutaciones*, Alianza Editorial, Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1989): *Diseño Curricular Base, Educación Secundaria Obligatoria II*, Madrid.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989): *Curriculum and evaluation standars for school mathematics*, The Council, Reston, Virginia.

OLIVEIRA, H., I. SEGURADO y J.P. PONTE (1997): «Mathematical investigation in the classroom: a collaborative project», en V. Zack, J. Mousley, y C. Breen (edit.), *Developing practice: Teacher´s inquiryand educational change*, Centre for Estudies in Mathematics, Science and Enviromental Education.

POLYA, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos, Madrid.

Notas

* Este trabajo está financiado por el proyecto UZ00-CIEN-02 de la Universidad de Zaragoza.

** Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza. Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo».